

La parole en algèbre

Au lycée, l'algèbre devient le facteur limitant : son insuffisante maîtrise coûte cher à la majorité des élèves. Selon son établissement, le collégien l'aura pratiqué de façon plus ou moins intensive. Sa présence diminue au brevet comme peau de chagrin, en conséquence de quoi, en certains lieux, le professeur peut être tenté de ne pas pousser bien loin la « virtuosité technique » de ses élèves ; d'autant que l'air du temps, par l'entremise des instructions officielles, l'en dissuade explicitement. Il s'avère ainsi nécessaire, au tout début de la seconde (et dans l'idéal avant même la rentrée) de reprendre les notions d'algèbre du collège pour les réorganiser et les approfondir.

Le rouleau compresseur de l'algèbre

Si « algèbre » est un mot arabe désignant une technique de résolution d'équations, la naissance de l'algèbre en son sens moderne d'algèbre *littérale* est née sous la plume du mathématicien François Viète. L'algèbre littérale, ce sont des notations qui deviennent opératoires : munies de règles de syntaxe qui leur assure une liberté de mouvement elles accèdent à une sorte d'autonomie. Elles ne sont plus des abréviations, ou des transcriptions de la parole, mais un idiome d'abord écrit, qui obéit à ses propres règles et que la parole et l'intuition peinent à suivre. C'en est au point qu'elles exigent parfois la création de nouveaux êtres mathématiques, comme les nombres relatifs, pour satisfaire leur insatiable demande de régularité et de (subtile) symétrie. Rien n'a pu arrêter le « rouleau compresseur de l'algèbre ». Descartes, comme nous le verrons dans les chapitres *Coordonnées* et *Équation d'une courbe*, prenant la relève de Viète, entreprit avec succès d'algébriser la géométrie.

Et au vingtième siècle, victoire suprême, ce furent les mathématiques dans leur totalité, qui tombèrent sous le joug de l'algèbre : les lois de la déduction furent purement et simplement réduites à des règles de syntaxe. Désormais, que cela plaise ou non, l'algèbre est aux mathématiques ce que l'écriture est à la langue. Apprendre à lire et à écrire, pour nous autres modernes qui ne connaissons plus les récitations antiques ni les déclamations des troubadours, pour nous autres qui venons après Gutenberg, nous autres à qui

apprendre Homère par cœur semble une prouesse aussi mythique que les exploits d’Ulysse eux-mêmes... Pour nous, disais-je, apprendre à lire et à écrire est devenu la condition nécessaire pour apprendre à conter — je veux dire un préalable incontournable à tout accès à la littérature. Eh bien l’algèbre est devenue incontournable de façon similaire en mathématiques.

On pourrait le déplorer : le mathématicien Laurent Lafforgue (médaille Fields 2002), relève dans un texte intitulé *Simone Weil et la mathématique*, à quel point cette dernière (philosophe et sœur du mathématicien André Weil), se défiait de l’algèbre. Dans ses *Cahiers*, elle écrit : « ARGENT, MACHINISME, ALGÈBRE. Les trois monstres de la civilisation actuelle. Analogie complète ». Elle appelle algèbre, dit Lafforgue, « l’utilisation, au nom de l’efficacité, de techniques acquises que l’on ne prend plus la peine de penser ». Mais puisqu’on n’y peut rien, au moins pourrait-on mieux *penser* les règles d’algèbre *au moment de leur apprentissage* et ne jamais les recevoir pour vraies sans que nous ne les connaissions évidemment et intimement être telles. Car il y a un monde entre la règle d’algèbre (donc le théorème ou parfois l’axiome) qu’on applique servilement parce qu’une autorité l’exige et la règle qu’on applique parce qu’on en a, un jour au moins, véritablement aperçu — et éprouvé, et conçu, et senti — la *raison d’être* (même un axiome a sa raison d’être). Dans le second cas, la technique s’est chargée de conviction et d’intuition, ce qui change tout. D’autant qu’on ne pourra pas toujours pratiquer le calcul algébrique comme une machine : il faudra parfois y faire preuve d’inventivité pour venir à bout d’un problème.

Il s’agit donc — c’est le propos du cours que j’ai rédigé — de réinsuffler de la pensée dans les calculs. Après, il faudra bien consentir à s’entraîner et ce sera au tour des exercices d’entrer en scène.

L’exercice

Oui, parce que — et j’ouvre-là une parenthèse — comprendre ne suffit pas. Il y a, entre les lignes de toutes ces « réformes » des quarante dernières années, outre un évident nivellement par le bas que la massification de l’enseignement ne suffit plus à expliquer, l’illusion qu’un homme pourrait accéder directement aux idées s’en s’embarrasser de leur

substrat « matériel », pourrait atteindre l'esprit sans passer par le corps, pourrait se faire ange sans risquer de devenir bête. La conviction — curieuse si l'on songe aux tendances intellectuelles contraires des années 70 — qu'on accéderait directement au signifié sans forcément s'embarrasser de la glaise du signifiant. C'est un manque d'humilité considérable que de se croire systématiquement dispensé de « faire ses gammes ». Ce qu'on accepte encore du sport ou de la musique, on le refuse aux disciplines scolaires, en sorte qu'on en est arrivé au point où le jeune apprenant doit attendre sa séance de boxe ou de violon du mercredi pour éprouver le plaisir d'un apprentissage exigeant et efficace, car prenant en compte la part nécessaire de « matérialité »¹ qu'il suppose. Fin de la parenthèse.

L'analyse des erreurs

J'en reviens à la compréhension, car il me faut justifier la prolixité de mon cours. Qui a su maîtriser le calcul algébrique n'a plus aucune idée du chemin qu'il a parcouru. Il a oublié, par exemple, toutes les questions qu'il s'est *inévitavelmente* posées sur les différents rôles des signes + et -. Il n'a pas forcément conscience des errances qu'il a fallu — à l'humanité d'un côté et à lui-même de l'autre — pour condenser en quelques symboles aux rapports admirablement réglés par l'usage, par la tradition, des vérités arithmétiques originellement hétérogènes. Car il faut le dire, ce « rouleau compresseur » est aussi un bijou de concision et d'efficacité. Il en a fallu, du Temps et du Silence, pour le concevoir ; il en faut aussi pour apprendre à s'en servir. Mais comment le professeur peut-il retrouver ce chemin dont il a en lui-même effacé la trace ? Stella Baruk propose, dans *l'Âge du*

¹ Paradoxale matérialité, puisque c'est au moment où elle s'incarne qu'une idée (ou un geste), en nous, prend vie. Autrement dit, lorsqu'une idée, par la parole, le dialogue *puis l'exercice* a pris corps chez l'élève, lorsqu'elle s'est incarnée en lui, est-elle devenue matérielle ou au contraire, passant de la matérialité du papier à la pensée, devenant vivante, n'est-elle pas enfin redevenue — pleinement — une idée ?

« Est-ce que tu ne penses pas que dans le nom, comme dans quelque être vivant, le son soit un corps, mais la signification soit en quelque sorte l'âme du son ? », demande Saint Augustin dans *La Dimension de l'âme*. Le signifié serait au signifiant ce que l'âme serait au corps. Appelons cela le rapport augustinien du signe. À titre d'hypothèse provisoire, je propose d'inverser ce rapport : de mettre le corps plutôt du côté du signifié, c'est-à-dire du *sens* et l'âme plutôt du côté du signifiant, c'est-à-dire du mot.

Capitaine, la voie royale de l'analyse des erreurs. Prenant pour viatique ce principe de réalité et partant donc des erreurs effectivement commises par les élèves dans les copies (ce n'est pas une matière qui manque), je suis tombé sur ce fait incontournable qu'il y avait *beaucoup* de choses à raconter. Beaucoup. Ensuite, j'ai simplement pris le parti de les raconter.

Entendre

À moins que vous ne soyez sourd de naissance, c'est par les *sons* que vous avez accédé au langage. Cet accès fut donc un phénomène éminemment *oral*, dont l'écriture alphabétique n'est que la transcription ultérieure. L'antériorité de l'ouïe concernant les phénomènes de langage (et donc de compréhension) se retrouve dans le mot *entendre*, qui signifie à la fois ouïr et comprendre. On la retrouve aussi dans le mot *langage* lui-même. Longtemps, d'ailleurs, la lecture ne s'est pratiquée qu'à voix haute. Ainsi, Saint Augustin, dans ses *Confessions*, dit à propos d'Ambroise :

**Quand il lisait, ses yeux parcouraient les pages, le cœur scrutait le sens,
mais sa voix et sa langue se tenaient en repos.²**

Si cette lecture silencieuse avait alors été chose courante, Augustin ne l'aurait tout simplement pas mentionnée. Il la mentionne, en observateur qui lui-même ne la pratique pas. Sinon, il aurait su que le lecteur ne « scrute » pas directement « le sens » d'un mot, mais plutôt qu'il prononce le mot en silence dans sa tête. « À voix basse », comme on dit (les spécialistes modernes parlent de *subvocalisation*). Ainsi, le son, même simplement mental (l'image acoustique, dirait Saussure), reste un intermédiaire nécessaire entre l'écriture et le sens ; ce qui est moins évidemment le cas avec les idéogrammes.

À l'instar des idéogrammes, les signes du « langage » algébrique sont d'abord des écritures, qu'on peut ensuite, éventuellement, prononcer. C'est déjà le cas des chiffres, qui demeurent intacts lors d'une opération de traduction d'un texte : passant d'une

² Saint Augustin. *Les Confessions*, Livre VI, III, 4. Page 881 dans le volume I de *La Pléiade*. Saint Ambroise de Milan fut évêque de Milan à la fin du IV^e siècle.

langue à une autre, ils seront prononcés différemment, mais s'écriront pourtant de la même façon. Pour cette raison, en algèbre, on a vite fait de mettre de côté la prononciation, comme quand, lisant un roman, nous ne prenons pas le temps de nous demander comment se dit exactement le nom d'un personnage et que nous nous contentons de le marmonner grossièrement dans notre tête.

Dans le temps de l'apprentissage au moins, cette négligence constitue une coupable erreur, elle-même source de bien d'autres erreurs corollaires. L'élève *doit* s'assurer qu'il sait prononcer *chaque* signe mathématique. Ou disons que l'élève qui ne maîtrise pas encore bien l'algèbre a intérêt à mettre de la parole sur l'écrit³, à irriguer l'écrit de parole. Je peux donner une illustration très précise et très significative du rapport entre l'oral et l'écrit en algèbre. Lorsque je souhaite aborder l'addition des fractions, je commence en général par proposer la somme suivante : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, que je laisse les élèves calculer à leur guise. La classe se partage alors en deux groupes (parfois de tailles proches) : ceux qui répondent $\frac{2}{6}$ et ceux qui répondent $\frac{2}{3}$. Les premiers ont regardé ce qui était écrit, tandis que les seconds l'ont *écouté* : « 1 tiers plus 1 tiers ? 2 tiers ! » Ce qui devrait surprendre, c'est qu'il n'est même pas besoin d'avoir compris ce qu'était un tiers pour donner la réponse juste : « 1 bidule plus 1 bidule ? Deux bidules ! ».

Que la parole, donc, ne laisse pas trop tôt la bride sur le cou de l'écrit. Et pour ne pas abandonner à leur seule inertie calculatoire les écritures algébriques, l'élève doit apprendre non seulement à *les dire*, mais aussi à *en parler*. C'est là que des termes un peu rares comme « somme algébrique », « commutativité », « monôme », « coefficient », ou même les néologismes que je propose, tel le mot « poly-produit », entrent en scène, venant enrichir le vocabulaire « méta algébrique ». Ils constituent les instruments inestimables d'une prise de possession de l'algèbre. Ils permettent non seulement

³ « (...) il me semble pouvoir affirmer, pour avoir longtemps pratiqué — et pour pratiquer encore — cette sorte de tétatologie, que les monstres oraux sont plutôt issus de productions de l'enfant, alors que les monstres écrits sont plutôt du fait de l'automathe. » Stella Baruk, *Échec et maths*, p216.

d'énoncer des règles, mais aussi de formuler à leur sujet des questions, mais surtout d'analyser les erreurs qui leur contreviennent.

Ces erreurs, toutefois, qu'il doit commettre au cours de son apprentissage, l'élève ne peut les analyser seul. Il me faut d'ailleurs affiner ici ce que je disais du rôle des exercices : l'entraînement n'est pas leur seule fonction. Ils sont là aussi pour dégrossir les idées en mettant la compréhension à l'épreuve. Les exercices sont là pour que l'élève puisse commettre les erreurs qu'il a à commettre. Ils sont ainsi l'occasion pour lui de se poser les dernières questions, puisqu'une erreur, en définitive, est une question qui peine à se formuler. Et si l'erreur est une question, il faut bien *quelqu'un* pour y répondre. À cet endroit précis la présence d'un maître — *quelqu'un* à qui parler — *quelqu'un* qui puisse répondre — s'avère rigoureusement indispensable. Comme elle l'était après la lecture du cours, mais ici de façons plus marquée.

Méthode

On pourrait imaginer le protocole suivant : les élèves ont lu ou écouté le cours. Ils ont posé leurs questions, le maître y a répondu. À présent, ils sont devant les exercices et *disposent des réponses*, afin qu'ils puissent contrôler leur résultat aussitôt qu'ils l'ont obtenu. Et là, deux cas de figure : soit le résultat est juste et ils passent à la question suivante. Soit il est faux et alors ils doivent localiser précisément leur erreur, puis comprendre en quoi elle en est une. Ce qu'ils ne pourront, disais-je, en général faire seuls. L'élève qui ne parvient pas à trouver son erreur vient alors au bureau du professeur avec son propre calcul et c'est à partir de la démarche de l'élève que le professeur a une chance de l'aider. Parfois, le seul fait de localiser précisément l'erreur sera une aide précieuse. Mais parfois aussi, il faudra entamer un dialogue qui n'est pas gagné d'avance, ou chacun devra faire des efforts pour se faire comprendre. Car même si les étapes intermédiaires sont écrites, la *raison* de l'erreur, elle, ne l'est pas.

Cette disposition permet à chacun d'aller à son rythme. Libre aux pédagogues de l'appeler pédagogie — inversée, différenciée — je l'appelle pour ma part séance d'exercices. Séance qui requiert du temps et du silence. C'est en cela que le bavardage et la précipitation sont des crimes : ils s'opposent à la parole car ils s'opposent au silence et au temps.

Conclusion

Il n'est pas si courant, dans une vie enseignante, qu'on trouve une idée, une méthode, qui apporte soudainement une amélioration significative au niveau de ses élèves. Ce fut pourtant le cas : à partir du moment où j'ai eu le courage de consacrer deux semaines en début de seconde à ces révisions d'algèbre, je peux dire que, sans parler de miracle ni de révolution, j'ai pu observer un net changement dans les copies. En gros, elles devenaient supportables pour le correcteur. Un objectif modeste et égoïste à la fois.