Géométrie dans l'espace

Réponses

Axiomes

1

a) Prenons deux points M et N (distincts) du plan, par l'axiome A1. Par A3, il existe une unique droite (MN) passant par ces deux points.

b) Prenons un point P n'appartenant pas à cette droite, par A4. La droite (PM) est forcément distincte de (MN), puisque P appartient à l'une mais pas à l'autre.

c) La droite (MP) ne passe pas par N, car sinon, ce serait la droite (MN) et P appartiendrait alors à (MN).

d) Par A2, on peut prendre un point I de (MN) distinct de M et de N. On démontre ensuite que (PI) est distincte des trois droites précédentes.

2

En classe.

Parallélisme

3

Soient P et Q deux plans parallèles. Soit R un plan coupant Q. Supposons que R ne coupe pas P. Alors, les deux plans Q et R seraient tous deux parallèles au plan P, ce qui, par le théorème 7 du cours, imposerait que Q et R soient parallèles. Or ils sont sécants. Il y aurait donc contradiction.

4

Indications.

L'unicité se prouve facilement par le théorème 7 (ressemble à l'exo précédent).

L'existence est plus délicate. On prend deux sécantes dans le plan, leurs parallèles passant par M, et le plan contenant ces parallèles (qui sont, entre elles, sécantes). Puis on applique les théorèmes 10 et 11.

5

a) Démontrons que, si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
Soient d et d' deux droites parallèles entre elles. Soit P un plan parallèle à d. Alors, il existe une droite Δ incluse dans P et parallèle à d (Théorème 10). Par la transitivité du parallélisme (théorème 9), Δ est aussi parallèle à d'. Donc d' est parallèle à P (théorème 10 de nouveau, mais dans l'autre sens).

b) Soit d une droite parallèle à un plan P et d' une droite parallèle à d et passant par un point de P. Alors, P ne peut pas couper d', sinon il couperait aussi d (par ce qui précède). Par conséquent, la seule possibilité est que d' soit incluse dans P, puisqu'elle ne peut ni couper P, ni n'avoir aucun point d'intersection avec P.

c) Soit d une droite parallèle à deux plans P et P' sécants entre eux. Notons Δ l'intersection de P et de P'. Δ est forcément une droite (théorème 3). Soit M un point de Δ. La parallèle à d passant par M est incluse à la fois dans P et dans P', par la question précédente. Elle est donc confondue avec Δ. Donc d est parallèle à Δ.

d) Soient P et P' deux plans parallèles entre eux. (Le cas où les plans sont confondus étant trivial, on traite seulement le cas où ils sont disjoints.)
Soit d une droite coupant P. Supposons que d ne coupe pas P'. Alors d est parallèle à P'. Par le théorème 10, il existe une droite d' incluse dans P' et parallèle à d. La droite d' ne peut couper le plan P car elle est incluse dans P' et qu'ainsi, P et P' auraient un point en commun. On aurait donc deux droites parallèles (d et d') et un plan (P) coupant l'une (d) mais pas l'autre (d'). Cela contredirait le résultat de la question a).

6

Les affirmations sont toutes fausses.

7

Application du paragraphe sur le parallélisme entre droite et plan (théorèmes 10 et 11).

Par le théorème des milieux, que les programmes du collège 2016 ont balayé, ou plutôt, donc, par la réciproque du théorème de Thalès, (BC) est parallèle à $(B'C')$. De même, (CD) est parallèle à $(C'D')$.

Par le théorème 10, $(B'C')$ est donc parallèle au plan (BCD). Idem pour $(C'D')$. Par le théorème 11, on en conclut ce qu'il y a à conclure.

Intersections

8

a) Aide : penser aux droites (DC) et (EF).

b) Aide : démontrer que (DC) est orthogonale au plan $(DAEH)$ par le théorème 13.

c) (DF)

d) (IJ)

e) (EFC)

f) (EJ)

9

En classe.

10

a) Par transitivité du parallélisme (théorème 9) : (AD) et (FG) sont toutes deux parallèles à (BC).

b) Des droites parallèles étant (par définition) coplanaires…

c) Les plans $(ABCD)$ et $(EFGH)$ sont parallèles. Si A, I, G et F étaient coplanaires, le plan $(AIGF)$ couperait les plans $(ABCD)$ et $(EFGH)$ en deux droites parallèles. (Théorème 6.) Donc les droites (AI) et (FG) seraient parallèles. Or il n'existe qu'une droite parallèle à (FG) et passant par A (théorème 5)…

d) Si (IF) et (AG) étaient sécantes, elles seraient coplanaires (théorème 2)…

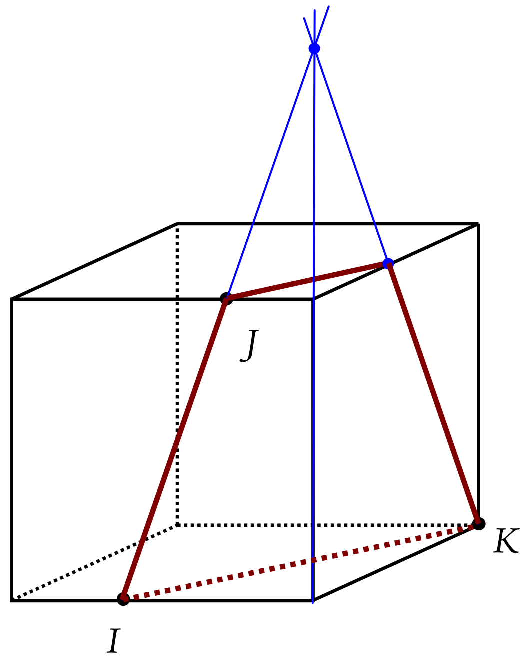
Constructions

11

En classe.

12

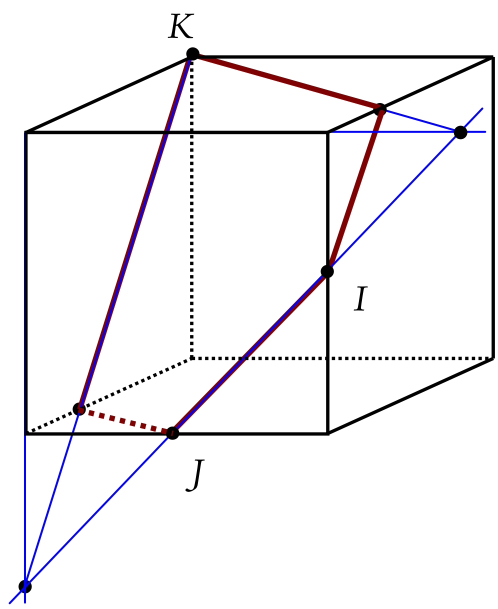
a)



b) En classe.

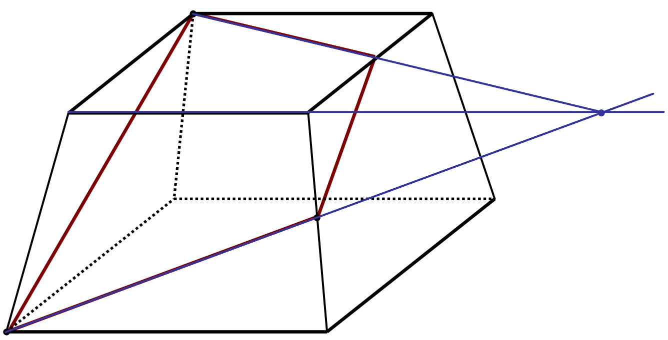
13

a)



b) En classe.

14



15

En classe.

16

Aide : construisez $I' = (AI) \cap (BC)$ et $J' = (AJ) \cap (CD)$.

Mesures

17

$\sqrt{3}$

18

$\approx 54{,}74°$

19

$\sqrt{5}$

20

Hauteur : $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Volume : $\dfrac{\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}118$.

21

a) $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$ (Par le th. de Pythagore.)

$r_2 = h$

$r_3 = r$

b) $A_1 = \pi(r^2 - h^2)$

$A_2 = \pi h^2$

$A_3 = \pi r^2$

c) Immédiat par les formules précédentes.

d) $V_3 = \pi r^2 \times r = \boxed{\pi r^3}$ (base × hauteur)

Attention, la hauteur du cône et du cylindre est r et non h.

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \times r = \boxed{\dfrac{1}{3}\pi r^3}$ $\left(\dfrac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}\right)$

donc $V_1 = \dfrac{2}{3}\pi r^3$.

Or la boule est le double de la demi boule, donc son volume est :

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

22

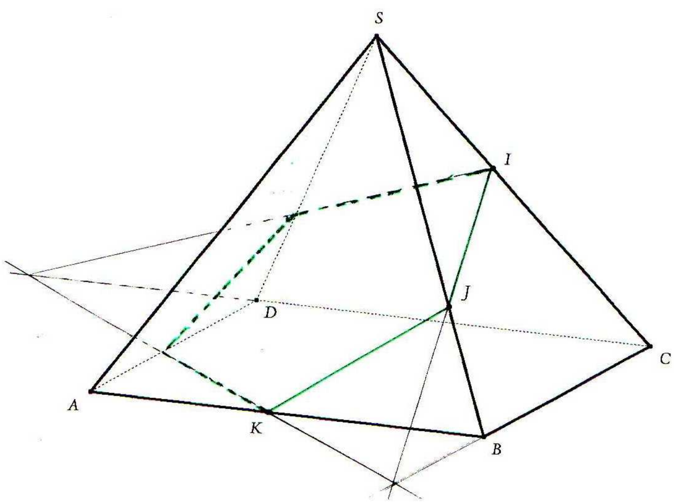
a) On applique le théorème des milieux dans SBC. Si l'on ne connaît pas le théorème des milieux, disons la réciproque du théorème de Thalès.

(AD) et (MN) sont donc coplanaires (puisque parallèles). Conséquemment, (AM) et (DN) itou. Mais si elles étaient parallèles, $ADNM$ serait un parallélogramme, ce qui contredirait $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

(AM) et (DN) étant <u>coplanaires</u> mais non parallèles, sont sécantes.

(« itou » signifie *aussi*, de façon un peu familière.)

b)



c) $\dfrac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}2357$

23

$SH = 7{,}2$ cm (par Thalès)

$V = 51{,}3\pi$ cm^3 $(\approx 161{,}2$ cm$^3)$

24

L'angle du secteur de disque servant à fabriquer la partie latérale du cône doit avoir un angle de $32{,}4°$.