Ensembles

Réponses

I- Généralités

1

a) Faux
b) Vrai
c) Faux
d) Vrai
e) On ne peut pas savoir
f) Vrai
g) Faux

2

a) $\{1;2;3;4;6;12\}$

b) C'est un ensemble infini. Il est donc impossible de l'écrire en extension.

c) $\{1;2\}$. La formulation de la question était ambiguë : est-ce l'ensemble des entiers qui sont chacun à la fois diviseur de 4 et de 6, ou bien l'ensemble des entiers qui sont diviseurs de 4 et de ceux qui sont diviseurs de 6 ? La première interprétation est privilégiée en mathématiques. La seconde produirait la réponse : $\{1;2;3;4;6\}$

⚠ Soyez très rigoureux avec la « syntaxe », c'est-à-dire avec l'utilisation des signes mathématiques. Il faut bien séparer les éléments par des points-virgules.

Question parfois posée : « faut-il forcément écrire les éléments par ordre croissant ? ». Non, puisque dans un ensemble, l'ordre des éléments n'a aucune importance.

3

a) {3 ; 6 ; 15 ; 30]

b) C'est l'ensemble les multiples de 15. Il y en a une infinité. Impossible, donc de l'écrire en extension.

c) {1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; 25 ; 50 ; 100 }

4

a) L'ensemble des puissances de deux jusqu'à 2^9. Ou encore : l'ensemble des diviseurs de 512.

b) L'ensemble des carrés (d'entiers naturels) jusqu'au carré de 14.

c) L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 50.

d) L'ensemble des diviseurs de 30.

5

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai
e) Faux
f) Faux
g) Faux
h) Faux
i) Vrai
j) Faux
k) Vrai

6

a) 3

b) 1

c) 8

7

a) $(a\,;a)$, $(a\,;b)$, $(a\,;c)$, $(b\,;a)$, $(b\,;b)$, $(b\,;c)$, $(c\,;a)$, $(c\,;b)$, $(c\,;c)$.

b) $\{a\,;b\}$, $\{a\,;c\}$, $\{b\,;c\}$.

8

a) $(a\,;a)$, $(a\,;b)$, $(a\,;c)$, $(a\,;d)$,
$(b\,;a)$, $(b\,;b)$, $(b\,;c)$, $(b\,;d)$,
$(c\,;a)$, $(c\,;b)$, $(c\,;c)$, $(c\,;d)$,
$(d\,;a)$, $(d\,;b)$, $(d\,;c)$, $(d\,;d)$.

b) $\{a\,;\,b\}$, $\{a\,;\,c\}$, $\{a\,;\,d\}$,
$\{b\,;\,c\}$, $\{b\,;\,d\}$,
$\{c\,;\,d\}$.

c) 25.

d) 10.

9

a) 100

b) 45

n étant un entier naturel, exprimer en fonction de n :

c) n^2

d) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

10

a) $(a;a;a)$, $(a;a;b)$, $(a;b;a)$, $(a;b;b)$,
$(b;a;a)$, $(b;a;b)$, $(b;b;a)$, $(b;b;b)$.

b) $\{a;b;c\}$, $\{a;b;d\}$, $\{a;c;d\}$, $\{b;c;d\}$.

11

a) 10^3

b) 10^5

c) $10\times9\times8\times7\times6 = 30\,240$

II- La relation d'inclusion

12

a) Faux
b) Vrai
c) Vrai
d) Faux
e) Vrai
f) Vrai
g) Faux
h) Vrai

13

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai
e) Faux

14

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai
e) Faux

15

Oui, mais il reste à trouver un exemple.

16

a) {a}, par exemple.

b) $\{a\,;\,b\}$, par exemple.

c) Oui : A.

d) Non.

17

a) Il y a 4 sous-ensembles de E. Attention à ne pas oublier l'ensemble vide, ni l'ensemble E lui-même : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a;b\}$.

a) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$, $\{a;b;c\}$.

18

$\varnothing$, $\{d\}$, $\{c\}$, $\{c;d\}$, $\{b\}$, $\{b;d\}$, $\{b;c\}$, $\{b;c;d\}$, $\{a\}$, $\{a;d\}$, $\{a;c\}$, $\{a;c;d\}$, $\{a;b\}$, $\{a;b;d\}$, $\{a;b;c\}$, $\{a;b;c;d\}$.

a) 32.

b) 2^{10}.

c) 2^n.
Attention à ne pas raisonner par *induction*, c'est-à-dire à ne pas « deviner » une loi générale à partir de quelques cas particuliers : il

faut un raisonnement (voir le corrigé). Comme dans les autres exercices de dénombrement, il s'agit de bien organiser les choses que l'on doit compter. Ici, on est tenter de regrouper les sous-ensembles par leur nombres d'éléments (l'ensemble vide, puis les singletons, puis les paires, puis les « triades », etc.). C'est une mauvaise idée.

Erreur courante : $1+n+\frac{n^2+n}{2}$: l'auteur de cette erreur a compté l'ensemble vide, les singletons et les paires, mais a négligé les éventuels triplets, quadruplets et le reste.

III- Opérations sur les ensembles

20

a) $\{a;b;c;d\}$

b) $\{a;b;c\}$

c) $\{c\}$

d) $\varnothing$ (on rencontre parfois la réponse : « $\{\varnothing\}$ ». Or cet ensemble n'est pas l'ensemble vide, mais un singleton.)

e) $\{a;c\}$

f) $\varnothing$

g) $\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{a;b\};\{a;c\};\{b;c\};\{a;b;c\}\}$

Être rigoureux avec la syntaxe : ne pas oublier les grandes accolades qui englobent le tout.

21

Réponses non données.

22

a) $\{(u;a);(u;b);(u;c);(v;a);(v;b);(v;c)\}$

b) $\{(u;u);(u;v);(v;u);(v;v)\}$

c) $\{(u;u;u);(u;u;v);(u;v;u)(u;v;v);(v;u;u);(v;u;v);(v;v;u);(v;v;v)\}$

23

Réponses non données.

24

7

25

7

26

300

27

2^{10}

28

a) $\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$

b) $\text{Card}(B)-\text{Card}(A)$

c) $\text{Card}(A)\times\text{Card}(B)$

29

a) $[\text{Card}(A)]^2$

b) $[\text{Card}(A)]^5$

c) $[\text{Card}(A)]^n$

d) $2^{\text{Card}(A)}$

IV- Les ensembles de nombres

1- Les grandes catégories de nombres

Cocher les cases pour répondre.

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
0,2			✓	✓	✓
−1		✓	✓	✓	✓
1,34cm					
3,14			✓	✓	✓
π					✓
$\frac{1}{8}$			✓	✓	✓
$\frac{1}{7}$				✓	✓
0,4444…				✓	✓
0,9999…	✓	✓	✓	✓	✓

31

$A = \frac{2}{11}$

32

$B = \frac{1}{333}$

2- L'irrationalité

33

a) Soient deux nombres rationnels. Par définition, on peut les écrire sous forme de fraction, par exemple $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, où a, b, c et d sont des entiers. « Calculons » alors leur somme :

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$. Ainsi, on a mis cette somme sous la forme d'une fraction (le numérateur et le dénominateur sont bien des entiers). Elle est donc rationnelle à son tour.

b) Démontrons la *contraposée*, à savoir : si un nombre a un double rationnel, alors il est lui-même rationnel. Cela revient à démontrer que la moitié d'un rationnel est elle-même rationnel. Considérons un nombre rationnel. Il s'écrit alors $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers.

Sa moitié s'écrit $\frac{\frac{a}{b}}{2}$, qui est égal à $\frac{a}{2b}$ …

c) $\sqrt{2}$, par exemple, est irrationnel et a pour carré 2, qui est entier donc rationnel.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une somme de deux irrationnels qui est elle-même irrationnelle, mais $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)$ est une somme de deux irrationnels qui est rationnelle.

34

Démonstration par l'absurde. Supposons qu'au contraire, $3\sqrt{2}+1$ soit rationnel. Il existerait alors deux entiers p et q tels que $3\sqrt{2}+1=\frac{p}{q}$.

Et alors on aurait : $3\sqrt{2}=\frac{p}{q}-1$

donc : $3\sqrt{2}=\frac{p}{q}-\frac{q}{q}$

donc : $3\sqrt{2}=\frac{p-q}{q}$

donc : $\sqrt{2}=\frac{p-q}{3q}$

Alors $\sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est faux.

3- Les intervalles

35

a) Vrai
b) Faux
c) Vrai
d) Faux
e) Vrai
f) Faux

36

a) $]-\infty;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}$)

b) $[0;1]$

c) $]-1;3]$

d) $\varnothing$

e) $]-2;1]\setminus\{-1\}$

37

a) $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b) $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

c) $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

38

Réponses non données.

39

Réponses non données.

V- Exercices supplémentaires

40

a) $\{a;b\}$

b) $\{a\}$

c) $\{a;b\}$

d) $\{a;b\}$

e) $\varnothing$

f) $\{a\}$

g) $\{(a;a);(b;a)\}$

h) $\{(a;a);(a;b)\}$

i) $\{(a;a)\}$

j) $\{\varnothing;\{a\}\}$

41

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$					✓
$\sqrt{4}$	✓	✓	✓	✓	✓
1 cm					
$\frac{2}{6}$				✓	✓
$\frac{3}{6}$			✓	✓	✓

42

a) $]-2;2[$

b) $[-2;0[\cup]0;2[$

c) $]1;2[\cup]2;3]$

d) $]-2;2[$

e) $[-1;1]$

f) $[-3;-2[\cup]2;3]$

g) $[-3;-1[\cup[1;3]$

h) $[0;1]$

i) $\varnothing$ (L'ensemble vide est considéré comme un intervalle.)

j) $]-\infty;-1[\cup]-1;1[$

43

a) 2

b) 6

c) 6

44

a) V
b) F
c) F
d) V
e) F
f) V
g) F
h) V
i) F
j) F
k) V
l) V

45

a) -1

b) $\sqrt{2}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

e) $(-1;1)$

Ce ne sont que des exemples : il y a dans chaque cas une infinité de réponses possibles.

46

a) $\{\varnothing\}$

b) $\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$

c) $\{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{\varnothing\}\};\{\varnothing;\{\varnothing\}\}\}$