ÉGALITÉS

I. AFFIRMATIONS

EXPRESSION/AFFIRMATION

Dans le chapitre de *Révisions d'Algèbre*, nous travaillions sur des expressions littérales. (Ce chapitre aurait d'ailleurs dû s'appeler plus spécifiquement *Calcul Littéral*.) Dans le présent chapitre, nous allons travailler sur des affirmations. Ce n'est pas du tout la même chose.

Une **expression** est une **phrase nominale**, elle exprime un **objet mathématique** (nombre, point, ensemble, fonction…) Ce qu'elle exprime s'appelle sa **valeur**. Exemples : « Le plus grand *nombre premier* inférieur à 10 » est une expression, qui *exprime* à la façon d'une **périphrase**, le nombre 7. « $3+3\times2$ » est une *expression numérique* dont la valeur est 9. « $3x-5$ » est une *expression littérale* dont la valeur dépend de celle de la variable x. Si A et B sont deux points distincts, l'expression « (AB) » représente, en géométrie, la droite passant par ces deux points.

Une **affirmation** est une **phrase verbale**, qui est soit vraie, soit fausse. *Vrai* et *faux* sont les deux **valeurs de vérité** possibles d'une affirmation. Le fait qu'il n'y ait pas d'autre valeur de vérité s'appelait le « principe du tiers exclu » dans l'Antiquité. Le fait qu'une même affirmation ne puisse être à la fois vraie et fausse s'appelait le « principe de non contradiction ».

La phrase « Il existe une infinité de nombres premiers » est une affirmation *vraie*. « Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux » est une affirmation dont *on ne sait pas* à ce jour (2017) si elle est vraie ou fausse. (Deux nombres premiers sont dits jumeaux lorsqu'ils ne sont séparés que par un entier, comme par exemple 17 et 19.)

« $x+1>10$ » est une affirmation qui a la forme d'une inégalité et dont la *valeur de vérité* dépend de la valeur de la variable x.[1] Pour résumer :

$2+2=4$	Affirmation vraie
$2>3$	Affirmation fausse
$x+1>10$	Affirmation parfois vraie, parfois fausse.

OPÉRATION / RELATION / CONNECTEUR LOGIQUE

Dans une **opération**, on entre deux[2] objets mathématiques (des nombres, par exemple) et il sort autre objet mathématique. Exemple : la multiplication. Lorsqu'on y entre les nombres 2 et 3, il sort le nombre 6.

Dans une **relation**, on entre deux objets mathématique et ça donne une affirmation et donc finalement, une valeur de vérité. Exemple : le

[1] Lorsque la valeur de vérité d'une affirmation ne dépend pas d'une variable, les mathématiciens parlent de *proposition*. Lorsque la valeur de vérité dépend d'une ou de plusieurs variables, ils parlent de *prédicat*. J'emploie le mot *affirmation* pour **subsumer** ces deux termes.

[2] Une « opération » dans laquelle on n'entre qu'un terme, nous avons appelé cela un **opérateur** (chapitre *Révisions d'Algèbre*). Exemple : la racine carrée.

signe <. Lorsqu'on y entre 2 et 3 (dans cet ordre), ça donne « 2<3 », qui est *vrai*.

On place un **connecteur logique** entre deux affirmations, donc en fait on lui présente deux valeurs de vérité et cela produit une nouvelle affirmation, donc finalement une nouvelle valeur de vérité. Exemple : « et ». Si j'ai deux affirmations que je note par la lettre **P** et la lettre **Q**, je peux fabriquer la nouvelle affirmation : « **P** et **Q** ». La valeur de vérité de cette nouvelle affirmation doit dépendre uniquement des valeurs de vérité de **P** et de **Q**. On doit donc pouvoir décrire tout connecteur logique en faisant la liste des cas, qui ne sont qu'au nombre de quatre. On appelle cela une **table de vérité** :

P	**Q**	« **P** et **Q** »
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

ÉQUIVALENCE LOGIQUE

Deux affirmations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont la même valeur de vérité. **P** est *équivalente* à **Q** se note : **P** ⇔ **Q**.

Par exemple, $ABCD$ étant un quadrilatère, affirmer que « $ABCD$ est un parallélogramme » revient à affirmer que « $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ». Si l'une des affirmations est vraie, l'autre est vraie aussi. Si l'une est fausse, l'autre est fausse aussi. Elles ont même *valeur de vérité*. Elles sont donc *équivalentes*.

IMPLICATION

Une **implication** est une affirmation de la forme « si… alors… ».
P *implique* **Q** se note : **P** ⇒ **Q** et signifie que **si** **P** est vrai, **alors**, **Q** est forcément vrai. (Mais si **P** n'est pas vraie, **Q** peut être indifféremment vraie ou fausse.)

Exemple : $x>3 \;\Rightarrow\; x>2$.

Une équivalence logique peut se décomposer en deux implications :
P ⇔ **Q** signifie : (**P** ⇒ **Q**) et (**Q** ⇒ **P**).

TRANSFORMATION

Transformer, c'est changer la forme d'une chose, sans changer ce qu'elle est. Pour une expression, en algèbre, ce qu'on voudra préserver, c'est le nombre qu'elle exprime, sa valeur. Pour une affirmation, ce qu'on voudra préserver, c'est sa *valeur de vérité*.

Transformer une affirmation, c'est la remplacer par une affirmation qui lui est équivalente.

II. DÉFINITIONS

ÉGALER

Le signe « = » se lit « égale », du verbe *égaler*. Il peut aussi se lire « est égal à », mais c'est plus long. En tout cas, « $x+1=3$ » n'a aucune raison de se lire « $x+1$ est égal 3 » (avec le « est » mais sans le « à »).

ÉGALITÉ

Une **égalité** est une affirmation fondée sur le signe « = ». Les deux expressions placées de part et d'autre du « = » se nomment les **membres** de l'égalité.

EXEMPLES

2 = 2 est une égalité vraie.

2+2=3 est une égalité fausse.

$a + b = b + a$ est une égalité toujours vraie. Une égalité toujours vraie se nomme une **identité**.

L'égalité $x^2 = x$, quant à elle, est certes souvent fausse, mais pas toujours.

III. AXIOMES

RÉFLEXIVITÉ

Toute chose est égale à elle-même. Autrement dit, quel que soit le nombre A, l'égalité $A=A$ est vraie. Cette règle était appelée « principe d'identité » dans l'Antiquité. On dit aujourd'hui que l'égalité est une relation *réflexive*.

PRINCIPE DE SUBSTITUTION

Si deux choses sont égales, on peut substituer l'une à l'autre. Plus précisément, si $A=B$, on peut *transformer* une affirmation ou une expression contenant A en remplaçant A par B en n'importe quel endroit. (A et B peuvent être sous forme d'expressions.)

COMMENTAIRES

Rappelons que *transformer* une expression, c'est la remplacer par une autre expression qui lui est *égale* et que *transformer* une affirmation, c'est la remplacer par une autre affirmation qui est soit *équivalente*.

On n'est pas obligé d'appliquer la substitution pour toutes les **occurrences** de A ; on peut substituer à certains endroits et pas à d'autres.

Ce principe[3] de substitution est utilisé très souvent ; par exemple lorsqu'on applique une *identité* d'algèbre, lorsqu'on remplace une variable par sa valeur (on parle alors de *spécification*), ou encore lorsqu'on remplace x par une expression dans la « notation fonctionnelle » (« $f(x)$ »).

IV. THÉORÈMES

SYMÉTRIE

Si $A = B$ alors $B = A$.

(Démonstration : supposons que l'affirmation $A = B$ soit vraie. Alors, partons de l'affirmation $A = A$, qui est vraie par réflexivité de l'égalité. Puisque $A = B$, on peut, par le principe de substitution, remplacer A

[3] Je dis *principe* de substitution, alors que le terme plus courant est « propriété de substitution ». Mais propriété de quoi ? À la limite, de la syntaxe mathématique dans ses grandes largeurs.

par B dans le premier membre de l'affirmation $A = A$. Ce qui donne en effet $B = A$.)

TRANSITIVITÉ

Si $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

Compte tenu du fait qu'on sait à présent que l'égalité est *symétrique*, on peut formuler la *transitivité* de l'égalité en disant, à la façon d'Euclide, que « deux choses égales à une même sont égales entre elles ». (Euclide est un mathématicien grec du III^e siècle avant J.C. Il est l'auteur des *Eléments*, l'un des livres les plus traduits et publiés dans l'histoire de l'imprimerie.)

(Démonstration : on part de la première égalité : $A = B$, puis, en utilisant la seconde et le principe de substitution, on remplace B par C dans le second membre, ce qui donne $A = C$, qui était l'affirmation à démontrer.)

V. TRANSFORMATION

RÉGLES ÉLÉMENTAIRES

Pour *transformer* une égalité, on peut ajouter un même nombre à ses deux membres, ou encore multiplier ses deux membres par un même nombre (non nul). Autrement dit, quels que soient les réels A, B et α, on a :

$$A = B \iff A + \alpha = B + \alpha$$

Et si $\alpha \neq 0$: $$A = B \iff \alpha A = \alpha B$$

(Démonstration :

Soient, A, B et α trois réels. Supposons que $A = B$.

Alors, en partant de l'égalité vraie (par réflexivité) $A + \alpha = A + \alpha$ et en remplaçant A par B dans le second membre, on obtient $A + \alpha = B + \alpha$.

Nous avons démontré que $A = B \Rightarrow A + \alpha = B + \alpha$.

Démontrons à présent la réciproque. Supposons que $A + \alpha = B + \alpha$.

Alors, en ajoutant $-\alpha$ aux deux membres de cette égalité (en appliquant ce qui vient d'être démontré), on tombe sur $A = B$.

Donc $A = B \iff A + \alpha = B + \alpha$.

Pour le produit, la démonstration est similaire.)

REMARQUE

La lettre grecque « α » se nomme *alpha*.

COROLLAIRES

On peut aussi soustraire un même nombre aux deux membres, puisque soustraire, c'est ajouter l'opposé.

On peut prendre l'opposé des deux membres, puisque pour prendre l'opposé on peut multiplier par -1.

On peut diviser les deux membres par un même nombre non nul, puisque diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

On dit un **corollaire**. Le mot est expliqué à la fin dans le glossaire.

PRODUIT EN CROIX

Quels que soient les réels a, b, c et d (avec b et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

Démonstration : nous verrons cela en exercice.

Commentaire : le théorème du produit en croix propose donc une *équivalence*, qui permet de remplacer une égalité de deux quotients par une égalité de deux produits.

VI. Équations

Définitions

Une **équation** est une égalité contenant une variable.
Une **solution** d'une équation est une valeur de la variable qui vérifie l'égalité.
Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

Commentaires

Rappelons qu'en algèbre, une lettre peut représenter un nombre. Ce nombre s'appelle alors la **valeur** de la lettre. Si cette valeur ne change pas (cas rare), la lettre se nomme une **constante** et sinon, une **variable**.

La *variable* de l'équation est souvent appelée une « inconnue ». Depuis Descartes, on la note souvent *x*. (René Descartes, philosophe et scientifique du XVIIe siècle, est l'auteur du célèbre *Discours de la Méthode*, qui est une sorte de préface à trois traités scientifiques, dont l'un, *La Géométrie*, se propose d'établir un lien entre algèbre et géométrie. C'est là que commence la tradition consistant à noter les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet.)

Vérifier signifie ici rendre vrai et non contrôler si c'est vrai.

Au collège, on donne à la fin la ou les solutions de l'équation. Au lycée, on donnera de préférence ces solutions « en paquet », dans un ensemble. Au lieu de dire « l'équation admet deux solutions : -1 et 7 », on dira plutôt : « l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{-1;7\}$ ». L'ensemble des solutions peut être un singleton ou même, lorsque l'équation n'a pas de solution, l'ensemble vide.

Degré d'une équation (définition)

Lorsqu'on fait passer tous les termes du même côté et qu'on met l'équation sous la forme $P(x)=0$, si $P(x)$ est un polynôme, alors le **degré** de l'équation est le *degré* de ce polynôme. (Voir le cours *Révisions d'Algèbre*, III- et IV-). Par exemple, l'équation $x^3-x^2=x^3+5x-1$ est équivalente à $-x^2-5x+1=0$, elle est donc de degré 2.

Méthodes de résolution

Tout dépend du *degré* de l'équation :

Équations du premier degré

Si l'équation est du premier degré, on applique les règles élémentaires de transformation de façon à isoler l'inconnue. Rappelons que transformer une affirmation, c'est la remplacer par une autre qui lui est équivalente, donc qui est vraie en même temps que la première et fausse en même temps. Donc qui a les mêmes solutions. Il est important de savoir résoudre l'équation sans sauter d'étape, en étant capable de justifier l'équivalence par l'une des règles de transformation élémentaires, ceci pour deux raisons : d'une part, pour s'assurer qu'on comprend ce que l'on fait. Par exemple, lorsqu'on écrit que $7x-5=7-2x$ est équivalent à $7x-5\mathbf{+2x}=7$, ce n'est que par facilité qu'on parle de « faire passer » le $-2x$ « de l'autre côté en changeant de signe ». Mathématiquement, on justifie cette transformation en disant plutôt qu'on ajoute $2x$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} & 7x-5=7-2x \\ \Leftrightarrow\quad & (7x-5)\mathbf{+2x}=(7-2x)\mathbf{+2x} \\ \Leftrightarrow\quad & 9x-5=7 \end{aligned}$$

D'autre part, lorsque nous aborderons les *inéquations*, nous devrons faire preuve d'une grande méticulosité afin de savoir dans quels cas nous devrons changer le sens de l'inégalité.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Si l'équation est de degré 2 (ou plus), alors, on fait tout « passer du même côté » et l'on factorise.

La factorisation en question peut s'avérer redoutable. Le cas général n'est pas au programme de seconde, mais nous l'aborderons un peu en exercice. Il arrive aussi que la factorisation soit impossible, comme pour le membre de gauche de l'équation $x^2+1=0$. Mais alors, heureusement, on peut conclure par la simple réflexion. Ici, par exemple, l'équation équivaut à $x^2=-1$. Or le carré d'un réel étant toujours positif, cette égalité n'est jamais vérifiée, donc l'équation n'a pas de solution.

Une fois la factorisation réalisée (lorsqu'elle est possible), on aboutit à une équation de la forme « *produit* = 0 ». Et l'on applique alors le théorème suivant pour la scinder en plusieurs équations du premier degré, qu'on n'a plus qu'à résoudre.

À partir du degré 5, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation. Plus précisément, certaines équations de degré 5 ont des solutions qu'il est impossible d'exprimer avec les opérations usuelles de l'algèbre et les racines. Cela a été prouvé par les travaux d'Évariste Galois, mathématicien français du XIX^e^ siècle (connu pour sa mort tragique, à vingt ans, en duel).

PRODUIT NUL

Un produit est nul si, et seulement si l'un (au moins) de ses facteurs s'annule : $AB=0 \Leftrightarrow (A=0 \text{ ou } B=0)$

Démonstration :

$\Leftarrow$ évident

$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que $AB=0$. Alors, si $A\neq0$, on divise les deux membres par A, ce qui donne $B=0$.

Remarque : un quotient, lui ne s'annule que si son numérateur s'annule. Si son dénominateur s'annule, alors le quotient n'a pas de sens (voir *Révisions d'Algèbre*, les quotients, diviser par 0). $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$.

Application

Considérons l'équation : $x^2 = x$. C'est une équation du second degré, donc nous allons « tout faire passer du même côté » et factoriser :

$$\begin{aligned} & x^2 = x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\{0;1\}}$.

« Valeurs interdites »

Il y a des équations qui, pour certaines valeurs de leurs variables, n'ont pas de sens. Par exemple $\frac{1}{x} = 2 - x$ n'a pas de sens lorsque x vaut 0, parce qu'on ne peut diviser par zéro. Et $\sqrt{x} = x$ n'a pas de sens lorsque x est strictement négatif, parce que la racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas. C'est en général à cause de la division et de la racine qu'il y a des valeurs de x à exclure. De telles valeurs de la variable, pour lesquelles l'équation n'a pas de sens, ne peuvent en aucun cas être des solutions (pour être vraie, une affirmation doit d'abord avoir du sens). On les appelle en général des **« valeurs interdites »**. Le mot est peut-être mal choisi, parce qu'en mathématiques, il ne s'agit pas d'autoriser ou d'interdire au sens moral de ces termes. Vous pouvez toujours écrire quelque chose qui n'a pas de sens. Votre feuille de brouillon ne va pas se mettre à crier. Mais puisque, mathématiquement parlant, on n'est censé écrire que des affirmations qui ont du sens, ce serait théoriquement à celui qui écrit

l'énoncé de préciser sur quel ensemble de nombres x peut varier. Comme c'est rarement le cas, celui qui résout l'équation aura intérêt à repérer dès le début d'éventuelles « valeurs interdites ». Car il est possible, même si c'est rare, qu'au cours de la résolution, une « valeur interdite » ne le soit plus et ait toutes les apparences d'une solution.

Exemple : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$.

La dernière équation a deux solutions : 0 et 1. Mais 0 est une « valeur interdite » de la première équation.

L'ensemble des valeurs qui ne sont pas « interdites », l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'équation a du sens, est définie, on peut l'appeler (en prenant le vocabulaire des fonctions) l'**ensemble de définition** de l'équation.

Les erreurs courantes

Nous traitons ici les erreurs concernant les équations du second degré. Elles surviennent souvent lorsqu'on cherche à employer une autre méthode que celle conseillée (« tout faire passer du même côté et factoriser »).

Prendre la racine des deux côtés…

En soi, si les deux membres sont toujours positifs, ce n'est pas faux, mais… Voyons plutôt un exemple. Considérons l'équation $x^2 = 9$:

$$\begin{aligned} & x^2 = 9 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 3 \end{aligned}$$

Selon la « résolution » qui précède, l'équation n'aurait qu'une solution.

Or elle en a une autre : -3. Il est en effet aisé de vérifier que le carré de -3 est lui aussi égal à 9. Ou est passée la solution perdue ? Quand l'erreur a-t-elle été commise ?

Eh bien, c'est au moment de remplacer $\sqrt{x^2}$ par x. En effet, si l'on élève un nombre au carré, puis qu'on prend la racine, on ne retrouve le nombre de départ qu'à la condition que celui-ci soit positif. $\sqrt{x^2}$ est en réalité égal à la *valeur absolue* de x : $\sqrt{x^2}=|x|$. (La notion de *valeur absolue* est expliquée à la fin du cours *Révisions d'Algèbre*.)

Diviser subrepticement par zéro.

Reprenons l'équation $x^2=x$ déjà traitée.

$$\begin{aligned} & x^2=x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{x}=\frac{x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & x=1 \end{aligned}$$

Là encore, on a perdu une solution en route, qui est le nombre 0. En effet, il n'y a pas que le nombre 1 qui soit égal à son carré : c'est aussi le cas de 0. L'erreur a été commise au moment de diviser par x, qui est, lorsque x s'annule, une division par zéro, chose impossible (voir le cours *Révisions d'Algèbre*, les quotients, diviser par 0).

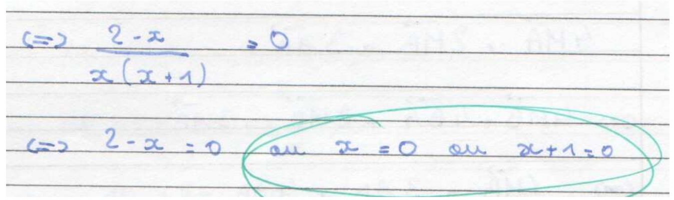
N'appliquer l'opérateur qu'à un seul membre.

$$\begin{aligned} & a=\frac{1-b}{1+b} \\ \Leftrightarrow\ & a=\frac{1-b}{1+b}\times(1+b) \\ \Leftrightarrow\ & a=1-b \end{aligned}$$

Il ne s'agit pas à proprement parler d'une équation, mais qu'importe. L'élève ne multiplie par $(1+b)$ qu'à droite (parce que cela lui est utile)

et oublie de faire de même à gauche (car ce serait juste par nécessité et non pour parvenir à un but souhaité). Appelons cela une « erreur d'hémiplégie » en attendant une meilleure dénomination.

Traiter un quotient qui s'annule comme un produit qui s'annule.



Un quotient ne s'annule que lorsque son *numérateur* s'annule. Si le dénominateur s'annule, le quotient n'existe pas.

VII. EXPRIMER EN FONCTION DE…

EXEMPLE

Il peut arriver que des variables varient les unes par rapport aux autres, qu'elles soient unies entre elles par une relation. Par exemple, si x et y représentent les mesures (en cm) des côtés d'un rectangle dont le périmètre est de 10 cm, on a : $2x+2y=10$. Si l'on veut modifier la valeur de x, alors cela modifie automatiquement la valeur de y. Il est parfois possible, en transformant l'égalité qui décrit la relation, de donner une formule qui dit comment calculer l'une des variable, connaissant l'autre (ou les autres). Dans le cas qui nous occupe, si nous souhaitons dire comment trouver y à partir de x, on peut transformer la relation ainsi :

$$2x+2y=10 \Leftrightarrow \frac{2x+2y}{2}=\frac{10}{2} \Leftrightarrow x+y=5 \Leftrightarrow \boxed{y=5-x}.$$

On a exprimé x à partir de y. Cela décrit une *fonction* qui dit comment aller de x à y. On dit qu'on a exprimé x en fonction de y. « En fonction de… », cela veut dire *par rapport à, compte tenu de, cela dépend de*. Le sens de cette expression courante provient du sens mathématique du mot *fonction*.

DÉFINITION

Exprimer x **en fonction de** y et z, c'est exprimer x à partir de y et z. C'est exprimer x par une formule ne contenant pas d'autre variable que y et z.

Cela peut donner par exemple quelque chose comme : $x = \dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{3}+2yz$.

VIII. SYSTÈMES

SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Un **système** de deux équations à deux inconnues est une affirmation formée de deux égalités reliées par un « et » (qu'on représente par une accolade) et qui contiennent deux variables, chacune (les mêmes dans les deux égalités), en général notées x et y.
Un *couple* de réels $(a\ ;\ b)$ est une **solution** du système lorsqu'en donnant à x la valeur de son premier terme et à y la valeur du second, le système est vérifié.
Résoudre un système, c'est trouver toutes ses solutions (ou l'ensemble de ses solutions).

EXEMPLE

$\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x+2y=12 \end{cases}$ est un système de deux équation à deux inconnues. $(2;5)$ est une solution (la seule, d'ailleurs) de ce système, car, lorsqu'on remplace x par 2 et y par 5, le système s'écrit : $\begin{cases} 3\times 2+4\times 5=26 \\ 2+2\times 5=12 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 26=26 \\ 12=12 \end{cases}$ c'est-à-dire à l'affirmation : « 26=26 et 12=12 », qui est vraie.

RÉSOLUTION

Pour résoudre un système du premier degré (sans x^2 ni y^2, ni xy…), on essaye (comme pour une équation) de le *transformer* progressivement, de façon à le rendre de plus en plus simple. Le but étant d'éliminer une inconnue dans l'une des deux équations. Nous verrons tout cela en exercice. Retenons qu'il vaut mieux procéder par équivalences et qu'on peut utiliser le corollaire du théorème suivant.

THÉORÈME

On peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser membre à membre deux égalités :

Si $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ alors :

- $A+C=B+D$
- $A-C=B-D$
- $AC=BD$

Si, de plus $C\neq 0$ et $D\neq 0$, alors : $\dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{D}$

DÉMONSTRATION

$A = B$ et $C = D$, telles sont les hypothèses.

$$\begin{aligned} & A = B \\ \Rightarrow\ & A + C = B + C \quad \text{(Par la première règle de transformation.)} \\ \Rightarrow\ & A + C = B + D \quad \text{(Par substitution de } C \text{ par } D \text{ dans le second membre.)} \end{aligned}$$

Le cas de la multiplication se démontre sur le même modèle. On déduit ensuite les cas de la soustraction et de la division de ceux, respectivement, de l'addition et de la multiplication.

REMARQUE

Euclide formule ce qui précède ainsi : « Si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, les sommes seront égales. » Chez lui, c'est un *axiome*, le deuxième des *Eléments*.

COROLLAIRE

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C + A = D + B \end{cases}$$

On peut, dans un système, remplacer l'une des égalités par la somme (ou la différence) membre à membre, des deux égalités. On obtient ainsi un système *équivalent* au précédent.

Démonstration : je laisse cela en exercice.

REMARQUE

On peut résoudre le système en procédant par *implications* (au lieu d'*équivalences*). Mais alors il est possible que de « fausses solutions » apparaissent. On peut comprendre cela avec une simple équation. Partons de l'équation $x = 1$:

$$x = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & x \times x = 1 \times x \quad \text{(On ne peut pas revenir en arrière car il faudrait diviser par } x \text{, qui peut s'annuler.)} \\ \Rightarrow\ & x^2 = x \end{aligned}$$

L'équation initiale n'a qu'une solution, alors que la dernière en a deux. Par conséquent, lorsqu'on procède par implications, les solutions doivent être vérifiées et cette vérification doit faire partie de la rédaction.

EXEMPLE

Considérons le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ (**S**).

Un système, une équation ou une inéquation, sont parfois désignés par des numéros ou lettres entre parenthèses. Ici, (**S**) désigne le système. Nous allons voir deux méthodes de résolution.

- **<u>RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION</u>**

Substituer, c'est remplacer. Grâce à l'une des deux égalités, on exprime une variable en fonction de l'autre. On peut ainsi, en <u>substituant</u>, dans la seconde égalité, la première variable par l'expression de la deuxième, obtenir une équation à une seule inconnue, qu'on résout comme telle :

$$(\mathbf{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13 - y}{2} \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

On a exprimé x en fonction de y dans la première égalité.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13 - y}{2} \\ 5 \times \dfrac{13 - y}{2} - 2y = 1 \end{cases}$$

On a substitué $\dfrac{13 - y}{2}$ à x dans la seconde égalité.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} & \textbf{(1)} \\ 5\times(1-3y)-4y=2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Pour rendre le seconde égalité plus simple, on se débarrasse du dénominateur 2 en multipliant par 2 de part et d'autre. On désigne ici les deux équations par des numéros entre parenthèses.

L'équation **(2)** étant une équation classique, à une seule variable, on la résout alors comme telle :

$$\textbf{(2)} \Leftrightarrow 5-15y-4y=2 \Leftrightarrow 5-19y=2 \Leftrightarrow 5=2+19y$$
$$\Leftrightarrow 3=19y \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{3}{19}=y}$$

$$\text{Donc } \textbf{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ y=\dfrac{3}{19} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3\times\dfrac{3}{19}}{2} \\ y=\dfrac{3}{19} \end{cases}$$

Par une nouvelle substitution, qui est le pendant de la précédente, on trouve enfin la valeur de x.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{19} \\ y=\dfrac{3}{19} \end{cases}$$

Le système admet donc pour unique couple solution : $\boxed{\left(\dfrac{5}{19};\dfrac{3}{19}\right)}$

- **<u>RÉSOLUTION PAR COMBINAISON</u>**

En ajoutant (ou soustrayant) membre à membre les deux équations du système, on peut se débarrasser d'une des deux variables si l'on

s'est arrangé auparavant pour que les coefficients devant cette variable soient opposés (ou égaux) :

$$\textbf{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \ \ \mathbf{+6y}=2 \\ 15x \ \ \mathbf{-6y}=3 \end{cases}$$

On a multiplié par 2 les membres de la première égalité et par 3 ceux de la seconde. De cette façon, « les y » vont disparaître à la prochaine étape :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 \\ (15x-6y)+(4x+6y)=3+2 \end{cases}$$

On applique le corollaire de la page 19.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 \\ 19x=5 \end{cases}$$

De cette façon, « les y » se neutralisent dans la seconde égalité, qui devient ainsi une simple équation à une inconnue.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\mathbf{x}+6y=2 \\ \mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{19}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\times\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{19}}+6y=2 \\ \mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{19}} \end{cases}$$

On remplace x par $\dfrac{1}{19}$ dans la première égalité (comme dans la première méthode, par substitution).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y=2-\dfrac{20}{19} \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y=\dfrac{18}{19} \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\frac{18}{19}}{6} \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{18}{19}\times\dfrac{1}{6} \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{19} \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases}$$

Le système admet donc pour unique couple solution : $\boxed{\left(\dfrac{5}{19};\dfrac{3}{19}\right)}$.

IX. Glossaire

phrase nominale / phrase verbale

En général, une phrase (celle-ci, par exemple) est construite autour d'un verbe (ici : « est »). Dans cette phrase-ci, pas de verbe ! La première est une phrase verbale et la deuxième une phrase nominale.

périphrase Une périphrase est une figure de style consistant à remplacer un mot par une phrase, plus longue, par exemple par sa définition.

subsumer Ranger un concept dans un concept plus général.

occurrence Circonstance, apparition (d'un mot, d'un phénomène astronomique). En l'occurrence : en la circonstance. Le mot occurrence peut signifier, pour un mot, son apparition dans un texte.

corollaire Un **corollaire** est, en mathématiques, une conséquence directe d'un théorème déjà démontré (ou ici, d'une définition). Le mot vient du latin *corollarium*, petite couronne et au figuré, don, supplément, parce qu'on donnait une petite couronne, notamment aux acteurs, pour gratification. De *corolla* : couronne. Il faut penser à la couronne de lauriers. On doit le mot à Nicole Oresme (évêque de Lisieux en 1377), à qui l'on doit aussi : abstraire, *antécédent*, concentrique, circonscrire, circuler, commensurable, communiquer, concave, configuration, courbure, cubique, *démonstration*, dénominateur, discontinu, divisible, économie, énoncer, équidistant, *équivalent*, excentrique, extension, facteur, harmonique, identité, inertie, *irrationnel*, latitude, longitude, métaphysicien, numérateur, pallier,

période, poème, prédicat, principe, *probabilité*, proportionnalité, quatrième dimension, rectiligne, scientifique, sphérique, transparent, unanimité.

Corollaire signifiait, chez Oresme, un argument nouveau à l'appui d'une affirmation précédente (sens qui ne peut nous être vraiment d'aucune utilité en mathématiques).