

ÉGALITÉS

Les cours et réponses aux exercices sont téléchargeables sur le site MathEnSeconde.fr

AFFIRMATIONS

1

Dire si c'est une affirmation ou une expression (ou autre).
A ou E.

Dire si c'est mathématique ou non. M ou \bar{M} .

Si c'est une affirmation mathématique, dire si elle est vraie ou fausse. V ou F.

Répondre directement sur la feuille.

- Les trolls.
- Les trolls verts.
- Les trolls sont verts.
- Les trolls qui sont verts.
- Les trolls verts qui sont idiots.
- Les trolls qui sont verts sont idiots.
- La tour Eiffel mesure 320,755m.
- L'arc de triomphe.
- Il s'est écoulé un nombre pair de secondes depuis le début de l'heure.
- La diagonale d'un carré de côté 1cm mesure 1,4cm.
- Un segment de 1mm de longueur contient plus d'un milliard de points.
- Dans un alignement d'atomes d'un millimètre de longueur, il y a plus d'un milliard d'atomes.
- $2 > 3$
- $2 + 5$
- $2 + 2 = 4$
- $1 + 1 = 1$
- 2 pommes + 2 pommes = 4 pommes
- $A \cup B$
- $A \subset B$

2

Dire si c'est une opération, une relation ou un connecteur logique.

	Opération	Relation	Connecteur
+			
<			
et			
\Rightarrow			
=			
\subset			
\cup			

3

Dire si les deux affirmations sont ou non équivalentes (au sens de *toujours* équivalentes). Si ce n'est pas le cas, on pourra se demander si l'une implique l'autre. ABCD est un quadrilatère. a , b , c et d sont des nombres.

- $a^2 = b^2$
 - $a = b$
- ABCD est un parallélogramme qui a un angle droit.
 - ABCD est un rectangle.
- $a = b + 1$
 - $a - 1 = b$
- ABCD est un losange.
 - Les diagonales de ABCD sont perpendiculaires.
- Les diagonales de ABCD sont de même longueur et ABCD a quatre angles droits.
 - ABCD est un carré.
- $a = 0$ ou $b = 0$
 - $ab = 0$

DÉFINITIONS

4

Dire s'il s'agit :

- d'une expression (Exp)
- d'une égalité vraie (EV)
- d'une égalité fausse (EF)
- d'une égalité parfois vraie, parfois fausse (EPVPF)
- d'une identité (égalité toujours vraie) (Id)
- d'une égalité toujours fausse (ETF)

Répondre directement sur la feuille.

- a) $2 + 2 = 4$
- b) $27 = 3 \times 3 \times 3$
- c) $1 + 1 = 3245$
- d) $4 = 4$
- e) $(x + y) + z - x + (y + z)$
- f) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- g) $x^2 = 2x$
- h) $u = u + 1$
- i) $x + x = 2 \times x$
- j) $2(a + b) = 2a + 2b$
- k) $1 + 1 = 3$
- l) $3 \times 4 = 2 \times 6$
- m) $2 \times x + 2 \times y - 2 \times z$
- n) $a + b = a \times b$

TRANSFORMATION

5

Avec les seules règles élémentaires revues en cours et en faisant apparaître à chaque étape, grâce à l'utilisation de deux couleurs différentes, la règle utilisée, redémontrez le théorème du produit en croix, qui affirme l'équivalence

suivante : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

(On suppose que a, b, c et d sont tous non nuls)

ÉQUATIONS

Définition

6

Entourer les équations :

	A	B	C
1	$2x + 1 = 5x - 2$	$2x + 1 + 5x - 2$	$x = X$
2	$0 = 1$	$a = a$	$a = 1 - a$
3	$2x < x + 1$	$x + 1 = 2u$	$u + 1 = 2u$
4	$x + 1 + 2x$	$1 = 1$	$ab = 0$

Solution

7

1 et -2 sont-ils solution de chacune des équation suivantes ?

- a) $x^2 - 4 = 0$
- b) $x^3 + 2 = 3x^2$

8

Si le nombre est solution de l'équation, mettre une croix dans la case.

	-1	0	1
$1 + x + x^2 + x^3 = 0$			
$x^2 = -x$			
$x = x^3$			

Résolution

9

Résoudre les équations suivantes en n'utilisant que les règles élémentaires revues en cours et en faisant apparaître clairement, grâce à l'utilisation de deux couleurs différentes, la règle utilisée.

- a) $4x - 1 = x + 1$
- b) $\frac{1}{x} = 3$

$$c) \frac{1-x}{2} = 3x$$

10

Résoudre les équations suivantes en n'utilisant que les règles élémentaires revues en cours et en faisant apparaître à chaque étape, grâce à l'utilisation de deux couleurs différentes, la règle utilisée.

$$a) x = 1 - \frac{1}{7}x$$

$$b) 1 - x = 1 + x$$

$$c) x - 1 = x + 1$$

Équations du premier degré

11

Résoudre les équations suivantes. (Les solutions, lorsqu'il y en a, sont ici des entiers relatifs. On pensera à les vérifier.)

$$a) \frac{x}{x-1} = 2$$

$$b) \frac{x+1}{x-1} = 1$$

$$c) \frac{1}{x} + 2 = \frac{2}{x} + 3$$

$$d) 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

12

Résoudre les équations suivantes. Vérifier, par écrit, les solutions.

$$a) \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x}$$

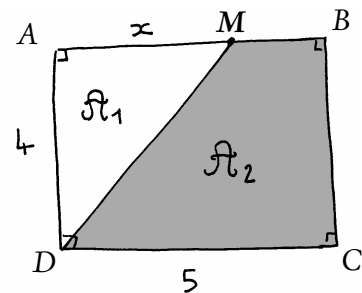
$$b) \frac{x+1}{x-1} = -3$$

Mises en équation

13

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 5\text{cm}$ et de largeur $AD = 4\text{cm}$. Le point M peut « se déplacer » sur le segment $[AB]$. On note x la mesure en centimètres de AM . Quelle doit être la valeur de x pour que l'aire \mathcal{A}_2 soit le double de l'aire \mathcal{A}_1 ?

(On exprimera d'abord les deux aires en fonction de x .)

**14**

Léa a eu trois notes : une première note, une seconde qui est d'un point supérieure à la première et une troisième qui est le double de la seconde. La moyenne de ces trois notes est 11. Quelles sont les trois notes de Léa ?

15

Considérons un triangle isocèle dont les angles à la base sont chacun le double de l'angle au sommet. Quel est l'angle au sommet ?

16

Considérons deux entiers consécutifs. La différence de leur carré est 123456789. Quels sont ces entiers ?

17

Un jardin a une forme rectangulaire. Il a vingt mètres de plus dans sa longueur que dans sa largeur. Son périmètre est de 360 m. Quelle est son aire ?

18

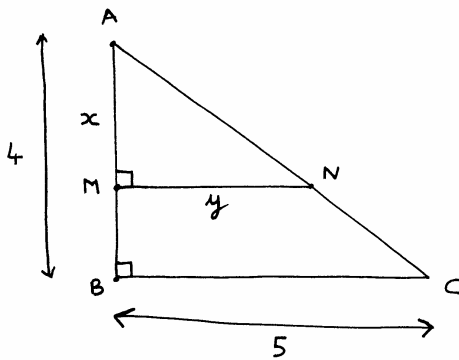
Considérons deux cercles concentriques dont les rayons diffèrent de 1cm exactement. Notons x la mesure (en centimètres) du rayon du plus petit de ces deux cercles. Déterminer la valeur qu'il faut donner à x pour que l'aire de la couronne délimitée par les deux cercles ait une mesure égale à 10 (en centimètres carrés).

Concentriques : de même centre.

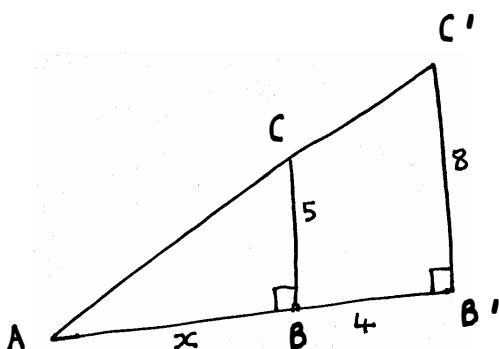
Couronne : surface comprise entre les deux cercles concentriques.

19

Exprimer y en fonction de x , puis déterminer la valeur de x pour laquelle $[MN]$ coupe le triangle rectangle ABC en deux parties de même aire. (Plutôt penser que l'aire de ABC doit être double de celle de AMN .)

**20**

Déterminer x .



Équations du second degré (ou plus). Cas particuliers.

21

Donner le degré de chacune des équations suivantes.

- $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$
- $x^3 - x^2 = x^3 + 5x - 1$
- $x(x+1) = 7$

22

Résoudre dans \mathbb{R} .

- $x^2 = x$
- $x^2 = 9$
- $x^2 = 2$
- $x^2 = -4$
- $x^2 = \sqrt{2}$
- $x^3 = x$ (Cette équation a trois solutions.)
- $x^2 + 1 = 2x$
- $x^2 + \frac{1}{4} = x$
- $2x^2 + 12x + 18 = 0$
- $(x-1)^2 = 9$
- $(x-1)^2 = 2$
- $(x+2)^2 = -1$
- $x^2 = (x+1)^2$

23

Résoudre dans \mathbb{R} .

- $x^2 = \frac{9}{4}$
- $-x^2 = \frac{9}{4}$
- $x^3 = -x$
- $(x-1)^2 = (x-2)^2$
- $x^2 + \frac{9}{4} = -3x$

24Résoudre dans \mathbb{R} .

- a) $(x+1)^2 + x(x+1) = 0$
 b) $(x-2)(2x-3) = x-2$
 c) $x^3 = 2x$
 d) $x^4 = 1$
 e) $2x^2 + 4 = 0$
 f) $\frac{(x+1)(2x-6)}{x+2} = 0$

Équations du second degré (ou plus). Cas général.

25Résoudre dans \mathbb{R} .

- a) $x^2 + 6x + 5 = 0$
 b) $x^2 - 4x + 3 = 0$
 c) $x^2 + 2x - 3 = 0$
 d) $x^2 - 8x + 15 = 0$
 e) $x^2 - 2x + 5 = 0$
 f) $x^2 + 8x + 17 = 0$
 g) $x^2 + x - 2 = 0$
 h) $x^2 + 8x + 14 = 0$
 i) $x^2 = x + 1$
 j) $x^2 + x + 1 = 0$
 k) $2x^2 - 4x - 6 = 0$

26 Résoudre dans \mathbb{R} .

- a) $x^2 - 8x + 12 = 0$
 b) $x^2 - x - 6 = 0$
 c) $x^2 + 2x - 1 = 0$
 d) $x^2 + 3x + 1 = 0$
 e) $2x^2 + x - 1 = 0$
 f) $x^3 + 3x = 4x^2$

27Fabriquer une équation qui a $\{-1; 2\}$ pour ensemble des solutions.**28**Résoudre dans \mathbb{R} .

- a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
 b) $x^2 + 2x = 8$
 c) $x^2 - x - 2 = 0$

« Valeurs interdites »

29Résoudre dans \mathbb{R} .

- a) $\frac{x^2}{x} = 0$
 b) $\frac{x-1}{x+1} = 0$

30Résoudre dans \mathbb{R} .

- a) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$
 b) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

31Résoudre dans \mathbb{R} .

$$\frac{2x-4}{x^2-1} = \frac{-2}{x^2-1}$$

32Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

On commencera par chercher les « valeurs interdites ».

EXPRIMER EN FONCTION DE...

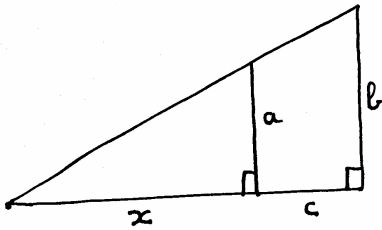
33

Seule la réponse est demandée.

- a) ABC est un triangle isocèle de sommet A . On pose : $a = \widehat{BAC}$ et $b = \widehat{ABC}$. Exprimer a en fonction de b .
- b) Mêmes données. Exprimer b en fonction de a .
- c) ABC est un triangle isocèle et rectangle en B . On pose : $a = AB$. Exprimer AC en fonction de a .
- d) ABC est un triangle rectangle en B tel que $AC = 10\text{cm}$. On pose : $a = \widehat{BAC}$. Exprimer BC en fonction de a .

34

Exprimer x en fonction de a , b et c . (Il n'est pas demandé de rédiger la partie géométrique.)

**35**

Sachant que $k = \frac{x-1}{x+1}$, exprimer x en fonction de k .

36

Sachant que $k = \frac{x}{x-1}$, exprimer x en fonction de k .

37

Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a \neq 1$ et $a \neq -1$, vérifiant la relation suivante : $b = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}$. On demande d'exprimer a en fonction de b .

38

Sachant que $x^2 + 3xy + y = 4y - 1$, exprimer y en fonction de x . Commencer par démontrer que x ne peut être égal à 1.

SYSTÈMES

39

Résoudre le système.

$$\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

40

Résoudre le système.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 12x - 12y = -1 \end{cases}$$

41

Résoudre le système.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

42

Résoudre le système.

$$\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$

43

Résoudre le système.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

44

Peut-on trouver deux nombres dont la somme est 3 et dont la différence est 4 ?

45

Un fleuriste vend ses roses et ses lys à l'unité. Un client se compose un bouquet avec 5 roses et 4 lys. Il paie 31€. Un autre, achète 4 roses et 7 lys et paie 40€. Que paieriez-vous si vous achetez 3 roses et 3 lys ?

46

Dans un groupe composé de chats et de poules, il y a 10 animaux et 32 pattes. Combien de chats, combien de poules ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

47

Un triangle rectangle isocèle a un côté qui est plus long d'un centimètre qu'un autre côté. Quelle est son aire ?

48

Exprimer l'angle entre deux côtés consécutifs d'un polygone régulier en fonction du nombre de ses côtés.

49

Il est demandé de résoudre le problème suivant par une méthode qui soit susceptible d'être généralisée et non par tâtonnement.

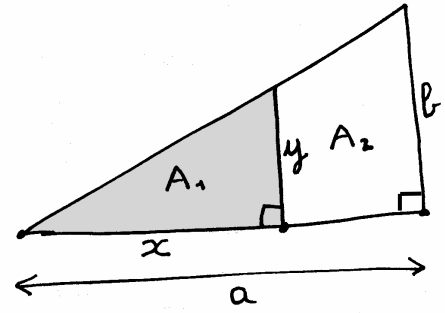
Un élève a eu 11 en interrogation et 16 en D.S.T. Comment choisir les coefficients pour que la moyenne soit de 15 ?

50

Quels sont les triangles rectangles dont les côtés sont, en centimètre, trois entiers consécutifs ?

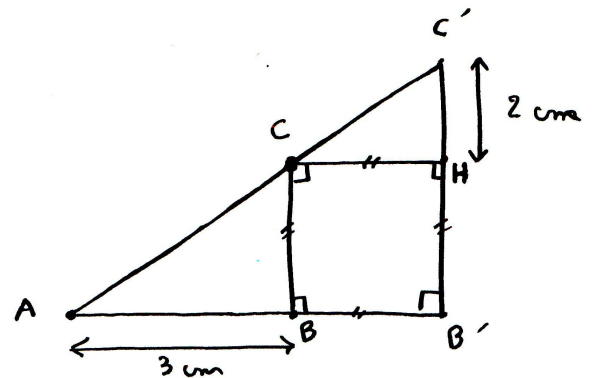
51

Supposons que les aires A_1 et A_2 soient égales. Exprimer alors x en fonction de a .



52

Quelle est l'aire du carré $BB'HC$?



53

Dans quels cas la somme de deux réels est-elle égale à la somme de leurs cubes ?

54

Un rectangle, si l'on ajoute un centimètre à sa largeur et à sa longueur, voit son aire augmenter de 10 cm^2 . Quel est son périmètre ?

55

Résoudre le système.

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$$

56

On cherche deux entiers dont la somme est 823 et dont la différence des carrés est 12345.