

# Fonctions I

## Généralités

Les réponses des exercices sont téléchargeables sur le site  
**MathEnSeconde.fr**

### I- Présentation

#### Exercice 1

Calculer les images, par la fonction *carré*, des nombres suivants :

- |                          |          |
|--------------------------|----------|
| a) 3                     | d) $a$   |
| b) $\sqrt{3}$            | e) $a^3$ |
| c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ | f) $3x$  |

#### Exercice 2

Calculer les images, par la fonction *inverse*, des nombres suivants :

- |                                |                      |
|--------------------------------|----------------------|
| a) 0,1                         | d) $t$               |
| b) $-\frac{1}{2}$              | e) $\frac{1}{t} + 1$ |
| c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ | f) $x^{-37}$         |

#### Exercice 3

Calculer les images, par la fonction *racine*, des nombres suivants :

- |               |                |
|---------------|----------------|
| a) $16 + 9$   | d) $x$         |
| b) 3          | e) $x^2$       |
| c) $\sqrt{3}$ | f) $x^2 + y^2$ |

#### Exercice 4

Notons  $F$  la fonction qui ajoute 1 (au nombre « entré »), puis élève au carré (le résultat obtenu).

Notons  $G$  la fonction qui élève au carré, puis ajoute 1.

- Calculer (ou exprimer) les images, par la fonction  $F$ , des nombres suivants :
  - 10
  - $\sqrt{2}$
  - $x$
- Calculer (ou exprimer) les images, par la fonction  $G$ , de ces mêmes nombres.

#### Exercice 5

Notons  $F$  la fonction qui double un nombre (le nombre « entré »), puis prend l'inverse (du résultat obtenu).

Notons  $G$  la fonction qui prend l'inverse d'un nombre, puis double (le résultat obtenu).

- Calculer les images, par la fonction  $F$ , des nombres suivants :
  - $\frac{1}{2}$
  - 2
  - $x$
- Calculer les images, par la fonction  $G$ , de ces mêmes nombres.

#### Exercice 6

Notons  $F$  la fonction qui, à tout nombre *associe* la somme de son double et de son carré.

Notons  $G$  la fonction qui, à tout nombre, *associe* le produit de son double et de son carré.

- Exprimer l'image, par  $F$ , d'un nombre  $a$ .
- Exprimer l'image, par  $G$ , d'un nombre  $a$ .
- L'une des deux fonctions peut être décrite par une phrase en français un peu plus simplement qu'elle ne l'a été dans l'énoncé. Quelle fonction ? Quelle phrase ?

#### Exercice 7

Notons  $F$  la fonction qui double un nombre, puis ajoute 1, puis double à nouveau.

- Calculer l'image, par  $F$ , de 5
- Exprimer l'image, par  $F$ , d'un nombre  $x$ .
- Développer et réduire l'expression obtenue.
- En déduire une descriptions plus simple de  $F$  par une phrase en français.

**Exercice 8**

Notons  $F$  la fonction qui, à tout entier relatif, associe le successeur du produit de son prédécesseur par son successeur.

Exprimer l'image, par  $F$  d'un entier  $n$  ; développer et réduire l'expression obtenue et en déduire une description plus simple de  $F$  par une phrase en français.

**II- Notations****Exercice 9**

Notons  $F$  la fonction carré. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Calculer :

- |                           |                |
|---------------------------|----------------|
| a) $F(3)$                 | h) $F(a+b)$    |
| b) $F(3)+2$               | i) $F(a)+F(b)$ |
| c) $F(3+2)$               | j) $F(F(3))$   |
| d) $F(3)+F(2)$            | k) $F(3+F(2))$ |
| e) $F(\sqrt{3}+2)$        | l) $F(F(a))$   |
| f) $F(\sqrt{3})+2$        | m) $F(F(a+1))$ |
| g) $F(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ | n) $F(F(a)+1)$ |
|                           | o) $F(F(a))+1$ |

**Exercice 10**

Notons  $f$  la fonction qui ajoute 1 et notons  $g$  la fonction qui double. Soit  $x$  un réel. Calculer :

- |              |              |
|--------------|--------------|
| a) $f(5)$    | g) $f(x)$    |
| b) $g(5)$    | h) $g(x)$    |
| c) $f(g(5))$ | i) $f(g(x))$ |
| d) $g(f(5))$ | j) $g(f(x))$ |
| e) $f(f(5))$ | k) $f(f(x))$ |
| f) $g(g(5))$ | l) $g(g(x))$ |

**Exercice 11**

On pose :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x^2 - x$

(«  $\forall x \in \mathbb{R}$  » se lit : « quel que soit  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$  ».)

- Calculer  $f(-1)$
- Calculer  $f(\sqrt{2}+2)$
- Soit  $a$  un réel quelconque. Calculer  $f(a+2)$ . (Par « calculer », on veut dire ici exprimer en fonction de la seule variable  $a$ , puis simplifier l'expression obtenue.)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Calculer  $f(1-x)$
- Calculer  $f(f(x))$ .

**Exercice 12**

On pose :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; u(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(«  $\forall x \in \mathbb{R}$  » se lit : « quel que soit  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$  privé de  $-1$  ».)

- Calculer  $u(\sqrt{2})$
- Calculer  $u(\sqrt{2}-1)$
- Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Calculer  $u(2a-1)$
- Soit  $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$ . Calculer  $u\left(\frac{1}{x}\right)$ . Que peut-on dire de  $u\left(\frac{1}{x}\right)$  par rapport à  $u(x)$  ?
- Soit  $x$  un réel différent de  $-1$  et de  $0$ . Exprimer  $u(u(x))$  en fonction de la seule variable  $x$ . Simplifier l'expression obtenue dans la question précédente.

**Exercice 13**

Exprimer la fonction avec la notation flèche à talon, de la façon la plus simple possible.

- Soit  $f$  la fonction qui fait la moyenne d'un nombre (le nombre « entré ») et de son inverse.
- 
- Soit  $g$  la fonction qui élève au carré le double du cube d'un nombre.

**Exercice 14**

Exprimer la fonction avec la notation flèche à talon, de la façon la plus simple possible. Bien évidemment, écrire les étapes intermédiaires.

- Soit  $f$  la fonction qui fait la moyenne du double et du triple d'un nombre.
- Soit  $h$  la fonction qui divise la somme du carré et du cube d'un nombre par le produit de ce carré par ce cube.

**III- Ensemble de définition****Exercice 15**

$$f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \quad g : x \mapsto \sqrt{x+1}$$

$$h : x \mapsto \sqrt{x+1} \quad i : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2-x}$$

Sans explication, on donnera les domaines de définition respectifs  $D_f$ ,  $D_g$ ,  $D_h$  et  $D_i$  de chacune des quatre fonctions définies ci-dessus.

**Exercice 16**

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2-1} \quad g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$h : x \mapsto \sqrt{-x} \quad i : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{-x}$$

Sans explication, on donnera les domaines de définition respectifs  $D_f$ ,  $D_g$ ,  $D_h$  et  $D_i$  de chacune des quatre fonctions définies ci-dessus.

**IV- Antécédents****Exercice 17**

Exceptionnellement, on répondra sans justifier.

- Quelle est l'image de 9 par la fonction carré ?
- Quels sont les antécédents de 9 par la fonction carré ?
- Quel est l'image de -9 par la fonction carré ?
- Quels sont les antécédents de -9 par la fonction carré ?
- Quelle est l'image de 3 par la fonction carré ?

- Quels sont les antécédents de 3 par la fonction carré ?
- Quelle est l'image de  $\sqrt{2}$  par la fonction carré ?
- Quels sont les antécédents de  $\sqrt{2}$  par la fonction carré ?
- Quel nombre a un unique antécédent, par la fonction carré ?

**Exercice 18**

Exercice à commencer au brouillon.

Soit  $f$  la fonction qui, au carré d'un nombre, soustrait son quadruple.

- Vérifier que l'image de 10 par  $f$  est bien 60.
- Donner une expression de  $f$ .
- Quels sont les antécédents de 0, par  $f$  ?
- Quels sont les antécédents de 5, par  $f$  ?

**Exercice 19**

$$f : x \mapsto x^3 - x$$

- Quels sont les antécédents de 0, par  $f$  ?
- Quels sont les nombres égaux à leur image, par  $f$  ?

**Exercice 20**

$$f : x \mapsto (x+1)^2$$

- Quel est l'ensemble des antécédents de 1, par  $f$  ?
- Quel est l'ensemble des antécédents de 2, par  $f$  ?
- Quel est l'ensemble des antécédents de -1, par  $f$  ?

**Exercice 21**

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quels sont les antécédents de 5, par  $f$  ?
- Quels sont les nombres égaux à leur image, par  $f$  ?

**Exercice 22**

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + x$$

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quel est l'ensemble des antécédents de 0, par  $f$  ?
- Quel est l'ensemble des antécédents de 2, par  $f$  ?

**Exercice 23**

On pose :  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

- Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
- Calculer l'image de  $\sqrt{2} + 1$  par la fonction  $f$ . (Bien entendu, on éliminera tout radical du dénominateur.)
- Quel est l'ensemble des antécédents de 2, par  $f$ ?

**V- Fonctions particulières****Exercice 24**

Démontrer que chacune des fonctions suivantes est *affine* en la mettant sous la forme  $x \mapsto ax + b$  puis en précisant la valeur des constantes  $a$  et  $b$ . Dire si la fonction est linéaire.

$f$  est la fonction qui ajoute 1 puis divise par 2.

$g$  est la fonction qui donne pour image 10% du nombre de départ.

$h$  est la fonction qui augmente un nombre de 10%

$i$  est la fonction qui donne la moyenne d'un nombre, de son double et du nombre 1.

$Id$  est la fonction *identité*.

$j$  est la fonction *constante* 2 (tout réel a pour image 2).

$$k : x \mapsto \frac{1-x}{2}$$

$N$  est la *fonction nulle*.

**Exercice 25**  **(Exercice à réviser en priorité.)**

$f$  est une fonction affine telle que  $f(1) = 2$  et  $f(3) = 1$ .

Déterminer  $f(0)$ .

**Exercice 26**

$g$  est une fonction affine telle que  $g(-2) = 3$  et  $g(3) = -\frac{9}{2}$ .

Démontrer que  $g$  est linéaire.

**Exercice 27**

$g$  est une fonction affine telle que  $g(-2) = 1$  et  $g(1) = -2$ .

Déterminer  $g(g(0))$ .

**Exercice 28**

Soit  $h$  une fonction affine vérifiant les conditions suivantes :  $h(-2) = 1$  et  $h(2) = -h(1)$ . Déterminer une expression de  $h$ .

**Exercice 29** 

Soit  $f$  une fonction affine vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(f(x)) = 2x + 1$$

Déterminer les valeurs possibles de  $f(1)$ .

**VI- Fonctions paires et impaires****Exercice 30**

Étudier la *parité* des fonctions suivantes :

a) La fonction inverse, que nous noterons  $i$ .

b)  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{2}$

c)  $g : x \mapsto x(x^2 - 1)$

d)  $h : x \mapsto x^2 + x$

e)  $u : x \mapsto 2x + 3$

**Exercice 31**

Étudier la *parité* des fonctions suivantes :

a)  $f : x \mapsto (x+1)^2$

b)  $g : x \mapsto x^2 + 1$

c)  $h : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

d)  $j : x \mapsto \frac{x^3 - x^2}{x-1}$

## VII- Synthèse

### Exercice 32

Soit  $f$  la fonction définie par :

Quel que soit  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x$

Autrement dit :  $f : x \mapsto x^2 - 2x$

- Quel est le domaine de définition de  $f$ ?
- Déterminer l'image, par  $f$ , de 3.
- Calculer  $f(\sqrt{2} + 1)$
- Quels sont les antécédents de 0, par  $f$ ?
- Quel est l'ensemble des antécédents de 3 par  $f$ ? ✎ (hors programme).
- Quels sont les nombres égaux à leur image, par  $f$ ?
- Soit  $g$  la fonction définie par :  $g : x \mapsto f(x+1) + 1$   
Déterminer une expression simple de  $g$ .
- Soit  $h$  la fonction définie par :  $h : x \mapsto f(f(x))$ .  
Déterminer une expression de  $h$  (sous la forme d'un polynôme).

### Exercice 33 ✎

On pose :  $f : x \mapsto \frac{2x-1}{2-x}$

- Donner l'ensemble de définition  $D$  de la fonction  $f$  (sans justification).
- Calculer  $f(\sqrt{2})$ . (Mettre le résultat sous la forme  $a\sqrt{2} + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des rationnels.)
- Quel est l'ensemble des antécédents du nombre 2, par  $f$ ?
- Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2; \frac{5}{4}\right\}$ . Exprimer  $f(f(x))$  en fonction de la seule variable  $x$ . Réduire l'expression obtenue.
- Quel est l'ensemble des antécédents du nombre 0, par  $f$ ?
- Quel est l'ensemble des réels égaux à leur image par  $f$ ?
- ✎ Démontrer que tout réel différent de  $-2$  admet un unique antécédent, par  $f$ .

## VIII- Exercices supplémentaires

### Exercice 34

Considérons la fonction  $F$  qui, à tout réel non nul, associe la somme de son inverse et de son opposé (on pourra vérifier que l'image de 2, par  $F$ , est  $-\frac{3}{2}$ ).

- Quelle est l'image de  $-2$  par la fonction  $F$ ?
- Quelle est l'image de  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  par la fonction  $F$ ? (On simplifiera bien entendu l'écriture du résultat.)
- Donner une expression de  $F$  et préciser son ensemble de définition.
- Quels sont les antécédents 0, par  $F$ ?
- Exprimer l'image de l'image d'un nombre  $x$ , par  $F$ . (Il n'est pas demandé de réduire l'expression.)

### Exercice 35

Soit  $g$  la fonction définie par  $g : t \mapsto \sqrt{2t+3}$

- Quel est le domaine de définition  $\mathcal{D}_g$  de la fonction  $g$ ?
- Déterminer l'image de 5 par  $g$ .
- Quels sont les antécédents de 5, par  $g$ ?
- Quels sont les antécédents de  $-5$ , par  $g$ ?
- Quels sont les nombres égaux à leur image, par  $g$ ? ✎