

# Inégalités Énoncés

## Règles élémentaires

### Exercice 1

Donner directement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes :

- a)  $x > -5$
- b)  $x \leq 3$
- c)  $x \geq x$
- d)  $x > x$
- e)  $x^2 \geq -1$
- f)  $(x+10)^2 \leq -1$

### Exercice 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes en utilisant uniquement les règles élémentaires revues en cours et en faisant apparaître clairement, grâce à l'utilisation de deux couleurs, la règle utilisée.

- a)  $-x \leq 1$
- b)  $x \leq -2x$
- c)  $1 - 3x < -2$
- d)  $\frac{x}{-3} \leq 5 + x$

### Exercice 3

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes en utilisant uniquement les règles élémentaires revues en cours et en faisant apparaître clairement, grâce à l'utilisation de deux couleurs, la règle utilisée.

- a)  $-5x \leq -2x + 12$
- b)  $-\frac{x}{2} + 2 > -\frac{x}{5} - 1$

## Inéquations du premier degré

### Exercice 4

Résoudre.

- a)  $\frac{x}{-2} \leq \frac{x-5}{3}$
- b)  $\frac{3}{5}x \leq \frac{3}{5} + x$
- c)  $-\frac{2}{3}x + 1 \geq 0$
- d)  $\frac{2}{3}x - 2 > 0$
- e)  $\frac{1+2x}{-5} \leq 2x$
- f)  $\frac{-x}{-1} \leq \frac{x}{-2} - 2$

### Exercice 5

Résoudre.

- a)  $-x + 3 \leq -2x$
- b)  $\frac{x}{-2} + 1 \leq -2x$

### Exercice 6

Résoudre.

- a)  $x - 1 < x + 1$
- b)  $x < x$
- c)  $x \leq x$

### Exercice 7 Au brouillon

Résoudre.  $\frac{1}{2-x} < 0$

## Petits « systèmes » d'inéquations à une seule inconnue.

### Exercice 8

Donner l'ensemble des solutions (l'ensemble des valeurs de  $x$  qui rendent l'affirmation vraie).

- a)  $x \geq 1$  et  $x \geq 2$

- b)  $x \geq 1$  ou  $x \geq 2$   
 c)  $x \leq 1$  et  $x \geq 2$   
 d)  $x \leq 1$  ou  $x \geq 2$   
 e)  $x \geq 1$  et  $x \leq 2$   
 f)  $x \geq 1$  ou  $x \leq 2$

**Exercice 9**

Résoudre.

a)  $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$       b) ou  $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$

**Exercice 10**

Résoudre.

a)  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$       b) ou  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$

**Inéquations du second degré (et autres)**
**Exercice 11***Au brouillon pour commencer.*

Résoudre :  $x^2 \geq 9$

**Exercice 12***Au brouillon pour commencer.*

Résoudre :  $(2-x)(x+1) \geq 0$

**Exercice 13***Au brouillon pour commencer.*

Résoudre :  $-7(1-2x)(x+2) < 0$

**Exercice 14***Au brouillon pour commencer.*

Résoudre :  $(1+x)(2-3x)(2x-1) \geq 0$

**Exercice 15**

Résoudre :  $x^2 < x$

**Exercice 16**

Résoudre : a)  $x^3 \geq x$   
 b)  $x^3 \geq x^2$

**Exercice 17**

Résoudre :  $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$

**Exercice 18**

Résoudre :  $\frac{1-x^2}{1-2x} \leq 0$

**Exercice 19**

Résoudre :  
 a)  $(x-2)(x-3) \leq 0$   
 b)  $(2-x)(x-3) \geq 0$   
 c)  $\frac{x+6}{6-2x} \geq 0$

**Exercice 20**

Résoudre.

a)  $x^2 < -9$   
 b)  $x^2 > -9$   
 c)  $(x-2)^2 < -2$   
 d)  $(x^2+1)(x-2) \geq 0$

**Exercice 21**

Résoudre.

a)  $x^2 \leq 9$   
 b)  $x^2 \geq 2$

- c)  $x^2 \geq -1$   
 d)  $x^2 \leq 0$   
 e)  $(x-1)^2 \leq 0$   
 f)  $(x-2)^2 \geq -1$   
 g)  $(x-1)^2 \leq 4$

**Exercice 22**

Résoudre.

- a)  $x^3 \geq -x$   
 b)  $(x^2 + 3)(x^2 - 1) < 0$   
 c)  $[(x+1)^2 + 9][(x+1)^2 - 4] \geq 0$

**Exercice 23**

Résoudre.

- a)  $x^4 \geq x^2$   
 b)  $(x-1)(-x^2 - 1) < 0$   
 c)  $x^3 \leq 0$   
 d)  $x - 1 \leq x + 1$

**Exercice 24** ✎ (hors programme)

Résoudre.

- a)  $x^2 - 8x + 16 \geq 0$   
 b)  $x^2 - 8x + 12 \leq 0$   
 c)  $x^2 - 8x + 17 \leq 0$   
 d)  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$   
 e)  $x^2 - 3x - 10 \leq 0$   
 f)  $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$

**Exercice 25**

Résoudre.

- a)  $x^2 + 2x \leq 0$   
 b)  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$  ✎  
 c)  $x^2 + 2x + 3 \geq 0$  ✎

**Exercice 26**

Résoudre.

- a)  $x \leq \frac{1}{x}$   
 b)  $\frac{x+1}{3x-2} \geq 1$   
 c)  $\frac{x-1}{1-x} \leq 0$   
 d)  $\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0$   
 e)  $\frac{x^2+1}{x-1} \geq 0$   
 f)  $\frac{x+1}{x} \geq \frac{x}{x+1}$

**Exercice 27**

Résoudre.

- a)  $\frac{-3}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$   
 b)  $(x-1)(x-2) \leq 2$   
 c)  $(x-2)^2 \geq -2$   
 d)  $x^4 < 16$

**Exercice 28**

Résoudre.

- a)  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x}$   
 b)  $-x + 2 < \frac{1}{x}$

**Exercice 29**

Résoudre.

- a)  $\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0$   
 b)  $\frac{1+x^2}{1+x} \leq 1-x$

**Exercice 30**

Développer et réduire :  $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Résoudre :  $x^3 \geq 8$

## Applications

**Exercice 31**

On pose :  $f : x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$

Quel est l'ensemble des réels dont l'image par  $f$  est positive ?

**Exercice 32**

On pose :  $f : x \mapsto \frac{1+x^3}{1+x^2}$

Quel est l'ensemble des réels inférieurs à leur image, par  $f$  ?

**Exercice 33**

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :


a)  $f : x \mapsto \sqrt{x-x^2}$

b)  $g : x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$

**Exercice 34**

Les nombres considérés dans cet exercice sont tous des réels strictement positifs. À quelle condition, en ajoutant un même nombre au numérateur et au dénominateur d'une écriture fractionnaire, augmente-t-on sa valeur ?

## Inéquations supplémentaires

**Exercice 35** 

a)  $\frac{-x+1}{-2} \leq 1$


b)  $\frac{1+2x}{-5} \leq 2x$


c)  $\frac{1-x}{3} \leq 2(x-3)$

d)  $\frac{12+2x}{-5} \geq 2x$

e)  $(x+1)^2 < -1$

f)  $(x+1)^2 > -1$

g)  $x^2 + 2 \geq 2x$  

h)  $x^2 - 3 \geq 2x$  

i)  $x^4 \leq 16$

j)  $x^4 < 1$

k)  $x^4 < 9$

l)  $x^4 < 2$

m)  $9x \geq \frac{4}{x}$

n)  $\frac{1-x^2}{1-2x} \leq 0$

o)  $\frac{-2x+6}{x^2-x} \geq 0$


p)  $x+1 \leq \frac{1}{x+1}$

q)  $x+1 + \frac{1}{x-1} \geq 0$

r)  $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x+1}$

s)  $\frac{x^2+10}{x+2} \leq 5$

t)  $\frac{2}{x^2+1} \geq 1$

u)  $\frac{x}{x+1} \leq x+2$  

v)  $\frac{x^3-x}{x^3+x} \leq 0$

w)  $\frac{x+x^3}{4-2x} \geq 0$

## Encadrements

### Exercice 36

Résoudre :  $1 \leq 1 - 2x \leq 2$

### Exercice 37

Sachant que  $5 \leq a \leq 6$ ,  
encadrer (par des constantes) :  $1 - 2a$

### Exercice 38

Sachant que  $-1 \leq a \leq 3$ ,  
encadrer (par des constantes) :  $\frac{3-a}{2}$

*Dans les exercices qui suivent, on vous demandera d'encadrer une expression (par des constantes) connaissant certaines informations sur ses variables. Faites un encadrement le plus « serré » que vous pouvez, mais sans vous soucier de prouver que c'est l'encadrement le plus « serré » possible.*

### Exercice 39

Sachant que  $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 5 \leq y \leq 6 \end{cases}$  encadrer :

- a)  $x + y$
- b)  $xy$
- c)  $x - y$

### Exercice 40

Encadrer  $ab$  sachant que :

- a)  $\begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 4 \leq b \leq 5 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} -2 \leq a \leq -1 \\ 4 \leq b \leq 5 \end{cases}$

### Exercice 41

Encadrer  $ab$  sachant que :  $\begin{cases} -2 \leq a \leq 1 \\ 4 \leq b \leq 5 \end{cases}$

### Exercice 42

Sachant que  $\begin{cases} -3 \leq x \leq -2 \\ -4 \leq y \leq -3 \end{cases}$ , encadrer :

- a)  $2x - 3y$
- b)  $xy$

### Exercice 43

Sachant que  $1 \leq a \leq b$ , démontrer que  $(b-a)(a+b-2)$  est positif.

### Exercice 44

Sachant que  $1 < a < b < 2$ , démontrer que  $(a-b)(a+b-2)(a+b-4)$  est strictement positif.

### Exercice 45

Sachant que  $\frac{1}{2} \leq a < b$ , démontrer que  $(b^2 - b + 1) - (a^2 - a + 1)$  est strictement positif.