Commentaires sur le D.S.T. de la rentrée 2011

0- Conseils

a) Quelques heures de travail pendant la seconde quinzaine d'août peuvent faire la différence.

b) Le propos n'est pas seulement d'obtenir une bonne note, mais surtout de bien commencer l'année, en ayant consolidé ses bases, notamment en algèbre. L'algèbre est souvent le facteur limitant en seconde. Au brevet, sa présence se réduit comme peau de chagrin, ce qui fait que, selon les établissements, les exigences en la matière peuvent varier.
Vous ne sauriez trop insister, notamment, sur les développements et réductions. Afin de vous y inciter, nous vous annonçons que la partie « calcul algébrique » comptera pour plus d'un tiers des points dans le contrôle de rentrée 2012.

c) En mathématiques, il faut parfois accepter de passer du temps sur un détail. Ce n'est jamais du temps perdu.

d) Une fois que vous avez examiné vos erreurs et compris les réponses du corrigé, imprimez de nouveau l'énoncé et cochez toutes les questions auxquelles vous n'avez pas su répondre correctement en première instance.
Laissez passer un peu de temps (par exemple deux jours) puis refaites ces questions. N'hésitez pas à réitérer ce procédé avec les réponses fausses en deuxième instance. Il est fort possible que certaines questions du contrôle de 2011 se retrouvent dans celui de 2012.

e) Peut-être n'avez-vous pas pu terminer en une heure et demie. Le jour de l'examen, ne cherchez pas à finir à tout prix. Mieux vaut répondre posément à trois quarts des questions que toutes les bâcler.

1- Puissances

a) $a^5 + a^3$ peut s'écrire : $1a^5 + 1a^3$. De cette façon, on voit mieux que c'est irréductible, comme « $3x^2 + 5x + 2$ ».
Erreurs fréquentes : a^8 ou a^{15}.

b) $a^5 + a$ peut s'écrire : $1a^5 + 1a^1$, qui est irréductible.
Erreur fréquente : a^6 ou a^5.

c) $a^5 \times a^3 = aaaaa \times aaa = \underline{a^8}$. Lorsqu'on a un doute, revenir à la définition.
On peut aussi appliquer la règle d'algèbre qui dit que, pour multiplier deux puissances d'un même nombre, on ajoute leurs exposants : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

d) Même principe.

e) Même principe.

f) $a^2 + a^2 = 1a^2 + 1a^2 = \underline{2a^2}$.
Erreurs très fréquentes : irréductible, ou a^4

g) On peut imaginer les puissances déployées sous leur forme de produits de plusieurs termes, puis on simplifie en « barrant » 2010 facteurs au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{\overbrace{aaa\ldots aaaa}^{\text{2012 facteurs}}}{\underbrace{aaa\ldots aa}_{\text{2010 facteurs}}} = \dfrac{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\ldots\cancel{a}\cancel{a}aa}{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\ldots\cancel{a}\cancel{a}} = aa = \underline{a^2}$
Plus efficacement, on applique la règle d'algèbre qui résume tout cela : pour diviser deux puissances d'un même nombre, on soustrait leurs exposants : $\dfrac{a^n}{a^q} = a^{n-q}$.

h) On peut toujours calculer l'expression numérique comme elle est écrite, mais il est bien plus astucieux d'appliquer l'identité remarquable qui permet de factoriser la différence de deux carrés : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
$2012^2 - 2010^2 = (2012-2010)(2012+2010) = 2 \times 4022 = \underline{8044}$.
Cette question a souvent été mal comprise, sans doute parce qu'elle propose la seule expression numérique de l'exercice.

Remarque générale :

Il n’y avait pas, dans ce D.S.T., de puissance d’exposant négatif, comme 2^{-3}. Rien ne dit qu’il n’y en aura pas en 2012. Rappelons de quoi il s’agit : lorsqu’on prend l’*opposé* de l’exposant, la puissance, c'est-à-dire le résultat, est changée en son *inverse*. Pour comprendre cette « définition », il faut bien distinguer l’*opposé* (nombre qui fait le contraire du point de vue de l’addition : l’opposé de +2 est −2) de l’*inverse* (nombre qui fait le contraire du point de vue de la multiplication : l’inverse de 2 est $\frac{1}{2}$).

Ainsi, $2^{+3} = 8$ donc $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

2- <u>Développement</u>

Développer, en mathématiques, cela veut dire distribuer (et non pas détailler un calcul).

a) $-\left(6x^2+1\right)-\left(3x^2-1\right)$ est une *somme algébrique* et doit être découpé mentalement ainsi :

$-\left(6x^2+1\right) \quad -\left(3x^2-1\right)$, <u>où l'espace central est à voir comme une un signe d'addition</u> qui n'est pas écrit. A l'intérieur des parenthèses, même principe : $-\left(+6x^2 \quad +1\right) \quad -\left(+3x^2 \quad -1\right)$.

Les signes moins devant les parenthèses servent à prendre l'opposé. Or, prendre l'opposé d'une somme revient à prendre l'opposé de chacun de ses termes : $-\left(+6x^2 \quad +1\right) \quad = \quad -6x^2 \quad -1$

(On peut voir le moins-opposé devant les parenthèses comme un facteur : « $(-1)\times$ », que l'on distribue sur une somme.)

Si l'on applique ce principe aux deux parties de l'expression, on obtient :

$-6x^2 \quad -1 \quad -3x^2 \quad +1$

$= -6x^2 \quad -3x^2 \quad -1 \quad +1$ Dans une somme algébrique, on peut déplacer les termes (avec leurs signes, bien entendu).

$= -9x^2$

b) $-(6x-1)-(3x-1)^2$

$= -(+6x \quad -1) \quad -\left[(+3x \quad -1)^2\right]$ Les crochets rappellent que l'exposant (le « puissance deux ») est prioritaire sur le moins-opposé.

$= -6x \quad +1 \quad -\left[+9x^2 \quad -6x \quad +1\right]$ On a développé le carré avec l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$= -6x \quad +1 \quad -9x^2 \quad +6x \quad -1$ Comme dans le a), on a pris l'opposé de chaque terme de la somme algébrique entre crochets.

$= -9x^2$ On a *réduit*, en comptant ensemble les termes de même « unité » (les x^2 d'un côté, les « x » d'un autre côté, les « uns » (valeurs numériques) encore à part.

c) $-(3x+1)(3x-1)-1$

Cette expression est une somme algébrique : $-(3x+1)(3x-1) \quad -1$

Le premier terme de cette somme peut être lu de deux façons qui, finalement, reviennent au même :

$-[(3x+1)(3x-1)]$ ou $[-(3x+1)](3x-1)$

En effet, en voyant le moins-opposé comme un « $(-1)\times$ », il s'agit de calculer : $(-1)\times(3x+1)\times(3x-1)$, qui est un produit de trois termes. Et l'on peut grouper les termes par deux comme on le souhaite. Voir le f) de cet exercice.

Nous choisirons le premier point de vue dans les calculs qui suivent.

$-[(3x+1)(3x-1)] \quad -1$

$= -[9x^2-1] \quad -1$ Application de l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, qui accélère le développement.

$= -9x^2 \quad +1 \quad -1$

$= -9x^2$

d) $(3-x)^2 \quad -3(3-2x)$

$= 9 \quad -6x \quad +x^2 \quad +9 \quad +6x$

$= x^2$

e) $+2 \quad -2[(x \quad -1)^2]$

$= +2 \quad -2[x^2-2x+1]$

$= +2 \quad -2x^2 \quad +4x \quad -2$

$= -2x^2 \quad +4x$

f) $(x-1)(x+2)(x+1)$

Cette expression est un produit de trois termes. Pour calculer une telle expression, il faut choisir comment on groupe les termes. Ainsi, pour calculer $2\times3\times4$, on peut associer les deux premiers termes : $(2\times3)\times4$, ou les deux derniers : $2\times(3\times4)$. Le résultat est le même, car la multiplication est *associative*. Autrement dit, quels que soient les réels a, b et c : $(ab)c=a(bc)$.

On peut également déplacer les termes dans le produit, car la multiplication est aussi *commutative*. Autrement dit, quels que soient les réels a et b : $ab = ba$.

	$(x-1)(x+2)(x+1)$	
$=$	$\left[(x-1)(x+1)\right](x+2)$	En associant le premier et le dernier facteur, on accélère le développement par une identité remarquable.
$=$	$\left(+x^2 \quad -1\right)(+x \quad +2)$	
$=$	$+x^3 \quad +2x^2 \quad -x \quad -2$	

3- Fractions

a) Pour simplifier une fraction, on divise par un même nombre son numérateur et son dénominateur. Mais ici, on a pris la racine. Le numérateur a été divisé par 10 et le dénominateur par 7.

b) Dans l'autre sens, on peut multiplier par un même nombre « en haut et en bas ». Ici, en multipliant par 1000 numérateur et dénominateur de l'écriture fractionnaire « $\frac{0,1}{0,049}$ », on se débarrasse des virgules et l'on retrouve la fraction initiale.

c) Pour obtenir l'inverse d'une fraction, il suffit d'inverse son numérateur et son dénominateur. L'inverse de $\frac{100}{49}$ est donc $\frac{49}{100}$, qui est en effet égal à 0,49.

d) La distinction entre *inverse* et *opposé* a été traitée à la fin du 1-. Les deux mots étant synonymes dans la langue courante, il convient de redoubler de vigilance.

e) Ce qui suit n'est valable que parce que les quantités traitées sont positives.
Le nombre $\frac{1}{F}$ étant inférieur à 1, à chaque fois qu'on multiplie une quantité par ce nombre, on la diminue. Or pour passer de $\left(\frac{1}{F}\right)^{2010}$ à $\left(\frac{1}{F}\right)^{2012}$, on multiplie à deux reprises par $\frac{1}{F}$.

f) $\frac{7}{3}$, c'est 7 divisé par 3. Or, en « posant la division », on se rend compte qu'elle ne s'arrête pas : on obtient $2,333\overline{3}$...
Un tel nombre, dont l'écriture décimale ne s'arrête pas n'est pas un *nombre décimal*, contrairement à 2,33 qui en est un.
Certes, les deux nombres sont à peu près égaux. Mais en mathématiques, deux choses « à peu près » égales, ne sont pas du tout égales.

g) $(-14):(-6)=\frac{-14}{-6}=+\frac{14}{6}=+\frac{7}{3}$

Moins par moins donne +.

h) Simplifier avant de calculer les produits : on peut diviser par 5 le 15 et le 45 et par 2 le 14 et le 2.

i) Les parenthèses sont inutiles. En revanche, n'oublions pas que la « priorité de la multiplication sur l'addition » oblige à grouper le « $\frac{1}{3}\times 2$ » :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 2+1 \\
= \quad & \frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\times 2\right)+1 \\
= \quad & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1 \\
= \quad & \frac{3}{3}+1 \\
= \quad & 2
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
& G-\frac{1}{G} \\
= \quad & \frac{7}{3}-\frac{1}{\frac{7}{3}} \\
= \quad & \frac{7}{3}-1\times\frac{3}{7}
\end{aligned}$$

Diviser par un nombre revient à multiplier par son *inverse*.

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{7}{3}-\frac{3}{7} \\
= \quad & \frac{49}{21}-\frac{9}{21} \\
= \quad & \frac{40}{21}
\end{aligned}$$

Or $\frac{40}{21}$ est inférieur à 2 (40 divisé par 20 donne 2, donc 40 divisé par 21 donne un nombre inférieur à 2).

4- <u>Calcul numérique</u>

a) Il s'agit d'une *somme algébrique* : $+3 \quad +3 \quad -2 \quad +2$

b) Priorité de la multiplication sur l'addition :

$$\begin{aligned} & +3 \quad -3\times(+2 \quad +2) \\ = \; & +3 \quad -3\times(+4) \\ = \; & +3 \quad -12 \\ = \; & -9 \end{aligned}$$

c) Il n'y a bien entendu aucune raison de distribuer terme à terme, puisqu'on peut calculer simplement. Les termes du premier facteur (qui est une somme algébrique) peuvent être groupés par deux de façon à simplifier les calculs. Rien n'oblige à calculer les négatifs d'un côté et les positifs de l'autre.

$$\begin{aligned} & (+1 \; -2 \quad +3 \; -4 \quad +5 \; -6 \quad +7-8)(-1 \quad -2) \\ = \; & (-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1)(-3) \\ = \; & (-4)(-3) \\ = \; & +12 \end{aligned}$$

Moins <u>par</u> moins donne +.

d) Priorité de l'*exposant* sur tout autre opérateur :

$$\begin{aligned} -(-1)^3-(-2)^4 \quad = \; & -\left[(-1)^3\right] \quad -\left[(-2)^4\right] \\ = \; & -\left[(-1)(-1)(-1)\right] \quad -\left[(-2)(-2)(-2)(-2)\right] \\ = \; & -[-1] \quad -[+16] \\ = \; & +1 \quad -16 \\ = \; & -15 \end{aligned}$$

e) *Somme algébrique* de fractions. Inutile de tout mettre en dix-huitièmes : on peut simplifier la dernière fraction.

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{14}{18} \quad = \; & +\frac{9}{9} \quad -\frac{3}{9} \quad +\frac{1}{9} \quad -\frac{7}{9} \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

f) Simplifier avant de calculer les produits.

$$\begin{aligned} & 1-\frac{21}{43}\times\frac{-430}{7}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\ = \; & 1 \quad -\frac{3\times\cancel{7}}{\cancel{43}}\times\frac{-1\times\cancel{43}\times 10}{\cancel{7}}\times\left(+\frac{3}{6} \quad -\frac{2}{6}\right) \\ = \; & 1 \quad -\frac{3}{1}\times\frac{-10}{1}\times\left(+\frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

$$= \quad 1 \quad +30\times\left(+\frac{1}{6}\right)$$
$$= \quad 1+5$$
$$= \quad 6$$

g) $$\frac{\frac{+15}{-2}}{-3}\times(+2) \quad = \quad \frac{-\frac{15}{2}}{-\frac{3}{1}}\times(+2)$$
$$= \quad \left(-\frac{15}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(+\frac{2}{1}\right)$$
$$= \quad \left(-\frac{\cancel{3}\times5}{\cancel{2}}\right)\times\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right)\times\left(+\frac{\cancel{2}}{1}\right)$$
$$= \quad (-5)\times(-1)$$
$$= \quad +5$$

h) Pour calculer un quotient de fractions, on utilise le fait que, diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse. Mais attention, pour obtenir l'inverse de la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, il faut d'abord la calculer.

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \quad = \quad \frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} \quad = \quad \frac{1}{\frac{5}{6}} \quad = \quad 1\times\frac{6}{5} \quad = \quad \frac{6}{5}$$

i) $-a^2-a^3$ doit se lire : $-\left(a^2\right) \; -\left(a^3\right)$, l'exposant étant prioritaire : voir début du 2- b).

Lorsque a vaut **-2**, $-a^2-a^3$ vaut donc : $\quad -\left[(\mathbf{-2})^2\right] \; -\left[(\mathbf{-2})^3\right]$

$$= \quad -[+4] \; -[-8] \qquad \text{[Voir d)]}$$
$$= \quad -4 \; +8$$
$$= \quad +4$$

j) Lorsque a vaut -2, $3a^3+28$ vaut : $\quad 3\times\left[(-2)^3\right]+28$

$$= \quad 3\times[-8]+28 \qquad \text{[Voir d)]}$$
$$= \quad -24+28$$
$$= \quad +4$$

Remarque : Penser à aller au bout des calculs. Les résultats « $\frac{9}{6}$ », « $\frac{5}{1}$ » et « $\sqrt{1}$ » doivent être encore simplifiés respectivement en : « $\frac{3}{2}$ », « 5 » et « 1 ».

5- Factorisations

Factoriser, c'est le contraire de *développer* (et développer, c'est *distribuer*). Lorsqu'on factorise, on cherche quel produit a pu, par développement, donner l'expression qu'on a sous les yeux. Autant développer est naturel et mécanique, autant factoriser peut constituer un problème redoutable. Les factorisations servent avant tout à résoudre des équations de *degré* 2 ou plus (voir 8-).

Pour commencer, distinguons deux types de factorisations : les classiques, qui demandent simplement d'appliquer à l'envers la distribution simple d'un terme sur une somme ; et les factorisations qui requièrent les identités remarquables.

- Les factorisations classiques.
  On applique « à l'envers » la règle de la distribution d'un facteur sur une somme :

$$a(b+c+d) \xrightleftharpoons[\text{factorisation}]{\text{distribution}} ab+ac+ad$$

On commence par repérer le facteur commun.

facteur commun

a) $x^2 - x \;=\; x\times \boldsymbol{x} \;-1\times \boldsymbol{x} \;=\; (x\;-1)\times \boldsymbol{x}$

On trouve parfois la réponse suivante : « $\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$ ».

Outre qu'elle complique inutilement les choses, cette réponse n'est pas acceptable, car elle n'est pas valable lorsque x prend une valeur strictement négative (celles-ci n'ayant pas de racine carrée).

[b) et c) : voir plus loin.]

d) $$\begin{aligned} 3x(x-1)-(x-1)(2x+1) &= (\boldsymbol{x}-1)(3x)-(\boldsymbol{x}-1)(2x+1) \\ &= (\boldsymbol{x}-1)\left[(+3x)\;-(+2x\;+1)\right] \\ &= (\boldsymbol{x}-1)(+3x\;-2x\;-1) \\ &= (x-1)(x-1) \end{aligned}$$

- Les factorisations qui mettent en jeu une identité remarquable.

  Si l'on doit apprendre les identités remarquables, c'est avant tout pour factoriser. Rappelons quelles sont les trois identités remarquables de degré deux, qu'on écrit ici, fort opportunément, dans le sens de la factorisation :

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

b) $-1 \quad +x^2 \quad = \quad x^2-1^2 \quad = \quad (x-1)(x+1)$

On a appliqué la troisième identité, où x joue le rôle de a et 1 celui de b.

c) $1-4x^2 = \quad 1^2-(2x)^2 \quad = \quad (1-2x)(1+2x)$

On a appliqué la troisième identité, où 1 joue le rôle de a et $2x$ celui de b.

e) Comme dans le b), pour reconnaître l'identité remarquable, il fallait commencer par ordonner les termes selon les puissances décroissantes de x :

$4+x^2-4x \quad = \quad x^2-4x+4 \quad = \quad x^2-2\times x\times 2+2^2 \quad = \quad (x-2)^2$

(On applique la deuxième identité.)

f) $$\begin{aligned}(3x)^2-4(x-1)^2 &= (3x)^2-[2(x-1)]^2\\ &= (3x)^2-(2x-2)^2\\ &= [3x-(2x-2)][3x+(2x-2)]\\ &= (3x-2x+2)(3x+2x-2)\\ &= (x+2)(5x-2)\end{aligned}$$

6- Racine

Ici, « racine » signifie « racine carrée ».
La *racine* carrée est l'opérateur inverse du carré :

$$3 \underset{\text{racine}}{\overset{\text{carré}}{\rightleftarrows}} 9$$

Plus précisément :
La racine carrée d'un nombre A est le nombre (positif) dont le carré est égal à A.

a) Il n'y a pas de nombre dont le carré soit égal à -1, car le carré de tout réel est positif. Donc -1 n'a pas de racine.

b) Le carré de **1** est égal à **1**… donc la racine de **1** est **1**.

c) $\sqrt{\sqrt{16}} \quad = \quad \sqrt{4} \quad = \quad 2$

d) La racine de 2 est le nombre (positif) dont le carré vaut 2 : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\sqrt{2} &= \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\times\sqrt{2}\times 1 + 1^2 + 2\sqrt{2} \\ &= 2 \cancel{-2\sqrt{2}} + 1 \cancel{+2\sqrt{2}} \\ &= 3\end{aligned}$$

e) $\sqrt{25-16} \quad = \quad \sqrt{9} \quad = \quad 3$

f) Pour se rendre compte que certaines sommes de racines sont réductibles, il faut « sortir des carrés » de la racine. Pour cela, on applique le théorème vu en troisième qui dit que la racine du produit est égal au produit des racines : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

Ainsi : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{9}\times\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Donc :

$\sqrt{27} - \sqrt{12} \quad = \quad 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \quad = \quad 1\sqrt{3} \quad = \quad \sqrt{3}$

g) Pour simplifier le calcul, on peut appliquer la même règle ici :

$\sqrt{25\times 16} \quad = \quad \sqrt{25}\times\sqrt{16} \quad = \quad 5\times 4 \quad = \quad 20$

h) Le carré de 2^6, c'est $2^6\times 2^6$, c'est-à-dire 2^{12}. Donc, la racine de 2^{12} est 2^6, c'est-à-dire 64.

7- <u>Solution d'une équation ou d'une inéquation</u>

Il ne s'agissait pas de *résoudre*, mais simplement de tester si un nombre donné était solution. Pour cela, revenons aux définitions : une équation est une égalité contenant une variable (parfois nommée « inconnue »). Une *solution* est une valeur de cette variable qui rend l'égalité vraie. Une équation peut avoir plusieurs solutions.

Par exemple, pour savoir si -1 est solution de $1+x+x^2+x^3=0$, il suffit de remplacer x par -1 et de regarder si l'égalité est vraie. Lorsque x vaut -1, l'égalité équivaut à : $1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3=0$

Ce qui équivaut à : $1-1+1-1=0$

Ce qui équivaut à : $0=0$.

Ce qui est vrai, donc -1 est solution de l'équation.

8- <u>Résolution d'une équation</u>

Il y a toujours plusieurs façons de résoudre une équation donné. Le corrigé ne propose qu'une voie parmi d'autres.

Distinguons pour commencer les équations du premier degré de l'équation du second degré (où il y a du x^2).

- Equations du premier degré.

  Le principe est de remplacer, à chaque étape, l'équation par une équation plus simple, mais *équivalente* à la précédente.
  On fait passer « les x » d'un côté et les « uns » (la partie numérique) de l'autre côté. Pour cela, on ajoute un même nombre de part et d'autre. On peut aussi diviser (ou multiplier) par un même nombre les deux membres, ce qu'on fait en général à la fin, pour éliminer un *coefficient*. Parfois, il faut commencer par développer les membres de l'équation.

a)

$10-4x$	$=$	$-2(x+1)$	
$+10 \quad -4x$	$=$	$-2(+1x \quad +1)$	On regarde comme telles les sommes algébriques.
$+10 \quad -4x$	$=$	$-2x \quad -2$	On développe et réduit ce qu'on peut.
$-4x$	$=$	$-2x \quad -12$	On ajoute -10 aux deux membres.
$-2x$	$=$	-12	On ajoute $+2x$ aux deux membres.
$\dfrac{\cancel{-2} \times x}{\cancel{-2}}$	$=$	$\dfrac{-12}{-2}$	On divise par -2 les deux membres.
x	$=$	$+6$	

L'équation admet 6 pour unique solution.

b)

$2(+1 \quad -x) \quad +1$	$=$	$3(+x \quad -1)$
$2 \quad -2x \quad +1$	$=$	$+3x \quad -3$
$-2x \quad +3$	$=$	$+3x \quad -3$
$-2x$	$=$	$+3x \quad -6$

$$\begin{aligned} -5x &= -6 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-6}{-5} \\ x &= +\frac{6}{5} \end{aligned}$$

L'équation admet $\frac{6}{5}$ pour unique solution.

d)
$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} &= 7 \\ \frac{x+1}{\cancel{x-1}} \times \cancel{(x-1)} &= 7 \times (x-1) \end{aligned}$$

On multiplie de part et d'autre par $(x-1)$, de façon à se débarasser du dénominateur.

$$\begin{aligned} +1x \quad +1 &= +7x \quad -7 \\ +1 &= +6x \quad -7 \\ +8 &= +6x \\ \frac{+8}{+6} &= x \\ +\frac{4}{3} &= x \end{aligned}$$

L'équation admet $\frac{4}{3}$ pour unique solution.

- L'équation du second degré.

  Pour résoudre une équation du second degré, on fait tout passer du même côté (il reste un zéro de l'autre côté) et l'on factorise :

c)
$$\begin{aligned} x^2 - 6 &= 10 \\ x^2 - 16 &= 0 \\ (x-4)(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

Or un produit est nul si, et *seulement* si l'un de ses facteurs (au moins) est nul. Donc l'équation revient à :

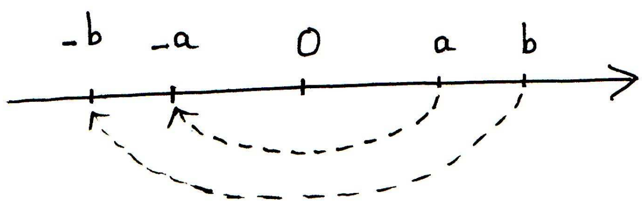
$x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$

$x = 4$ ou $x = -4$

L'équation admet deux solutions : 4 et -4.

9- Résolution d'une inéquation

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on procède de la même façon qu'avec une équation : on ajoute un même nombre aux deux membres pour faire passer « les x » d'un côté et « les uns » de l'autre. On peut aussi multiplier ou diviser par un même nombre. Mais attention : si l'on prend les opposés de deux relatifs, leur ordre est changé :



Or, lorsqu'on multiplie par un nombre négatif, on prend subrepticement l'opposé : multiplier par -2 revient à multiplier par 2 et à prendre l'opposé. Même principe lorsqu'on divise par un nombre négatif.
Pour résumer, on ne change pas le sens d'une inégalité lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux membres ou qu'on les multiplie (ou divise) par un nombre strictement positif. En revanche, lorsqu'on multiple (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement négatif, l'ordre est inversé.

a)
$$\begin{aligned} +3x -7 &\geq -1 \\ +3x &\geq +6 \\ x &\geq +2 \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres situés après $+2$ sur l'axe des réels.

b)
$$\begin{aligned} -2x +5 &\leq +7 \\ -2x &\leq +2 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Là, on a divisé par un nombre négatif de part et d'autre, c'est pourquoi le sens de l'inégalité a été inversé.

Les solutions sont les nombres situés après -1 sur l'axe des réels.

c) L'inégalité de l'énoncé équivaut à $+1 \geq -1$, ce qui est vrai, indépendamment de la valeur de x. Tous les nombres sont donc solution.

10- Résolution d'un système

L'accolade du système signifie « et ». On cherche les valeurs de x et y qui rendent les deux égalités vraies. Lorsqu'on a ainsi une valeur de x et une valeur de y rendant simultanément vraies les deux égalités, le *couple* formé par ces deux nombres est une solution du système. Par convention, l'ordre des termes dans le couple correspond à l'ordre alphabétique des variables.
(Il peut arriver que certains systèmes aient plusieurs couples solutions, mais ces systèmes sont évités en troisième.)

Une résolution de système, comme d'ailleurs une résolution d'équation ou d'inéquation, est un raisonnement avant d'être un calcul. Du moment qu'on a compris ce qu'était un système et une solution d'un système, on peut toujours tenter de le résoudre sans connaissance technique particulière.

Il y a deux inconnues, mais aussi deux égalités qui donnent des informations sur ces inconnues en même temps. Il faut arriver à démêler ces informations. Le but est d'obtenir une équation contenant une seule inconnue. On y parvenir par *substitution* ou bien par *combinaison* :

- Résolution par substitution.

  Substituer, c'est remplacer.
  Grâce à l'une des deux égalités, on exprime une variable en fonction de l'autre. On peut ainsi, en substituant, dans la seconde égalité, le première variable par l'expression de la deuxième, obtenir une équation à une seule inconnue, qu'on résout comme telle :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x-2y=1 \end{cases} \quad \textbf{(S)}$$

Un système, une équation ou une inéquation, sont parfois désignés par des numéros ou lettres entre parenthèses. Ici, (**S**) désigne le système.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ 5x-2y=1 \end{cases}$$

On a exprimé x en fonction de y dans la première égalité.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ 5\times\dfrac{1-3y}{2}-2y=1 \end{cases}$$

On substitue $\dfrac{1-3y}{2}$ à x dans la seconde égalité.

(Pour rendre le seconde égalité plus simple, débarassons-nous du dénominateur 2 en multipliant par 2 de part et d'autre :)

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{2} & \textbf{(1)} \\ 5\times(1-3y)-4y=2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

On désigne ici les deux équations par des numéros entre parenthèses.

L'équation **(2)** étant une équation à une seule variable, on la résout comme telle :

(2) équivaut à :

$$\begin{aligned} &5-15y-4y=2 \\ &5-19y=2 \\ &5=2+19y \\ &3=19y \\ &\frac{3}{19}=y \end{aligned}$$

Donc **(S)** équivaut à :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{2} \\ y = \dfrac{3}{19} \end{cases}$$

Par une nouvelle substitution, qui est le pendant de la précédente, on trouve enfin la valeur de x :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-3\times\dfrac{3}{19}}{2} \\ y = \dfrac{3}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{19} \\ y = \dfrac{3}{19} \end{cases}$$

Le système admet donc pour unique couple solution : $\boxed{\left(\dfrac{5}{19};\dfrac{3}{19}\right)}$

(Les termes d'un couple se notent entre parenthèses, séparés par un point-virgule.)

- Résolution par combinaison.

En ajoutant (ou soustrayant) membre à membre les deux équations du système, on peut se débarrasser d'une des deux variables si l'on s'est arrangé auparavant pour que les *coefficients* devant cette variable soient opposés (ou égaux) :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x \quad +\mathbf{6y}=2 \\ 15x \quad -\mathbf{6y}=3 \end{cases}$$

On a multiplié par 2 les membres de la première égalité et par 3 ceux de la seconde. De cette façon, « les y » vont disparaître à la prochaine étape :

$$\begin{cases} 4x+6y=2 \\ (15x-6y)+(4x+6y)=3+2 \end{cases}$$

On ajoute les membres de la première égalité à ceux de la seconde (si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, on obtient des sommes égales).

$$\begin{cases} 4x+6y=2 \\ 19x=5 \end{cases}$$

De cette façon, « les y » se neutralisent dans la seconde égalité, qui devient ainsi une simple équation à une inconnue.

$$\begin{cases} 4x+6y=2 \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\times\dfrac{5}{19}+6y=2 \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases}$$

On remplace x par $\dfrac{1}{19}$ dans la première égalité (comme dans la première méthode, par substitution).

$$\begin{cases} 6y=2-\dfrac{20}{19} \\ x=\dfrac{5}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y = \dfrac{18}{19} \\ x = \dfrac{5}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\frac{18}{19}}{6} \\ x = \dfrac{5}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{18}{19} \times \dfrac{1}{6} \\ x = \dfrac{5}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{19} \\ x = \dfrac{5}{19} \end{cases}$$

Le système admet donc pour unique couple solution : $\boxed{\left(\dfrac{5}{19};\dfrac{3}{19}\right)}$

Remarque : les systèmes sont utiles en seconde, notamment lors de l'étude des « équations de droites ».

11- <u>Géométrie plane</u>.

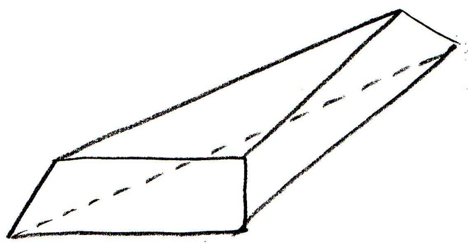
On utilise de théorème de Thalès pour déterminer x, puis le théorème de Pythagore pour déterminer y.

12- <u>Géométrie plane</u>.

En « traçant » une hauteur du triangle, on fait apparaître deux triangles rectangles identiques (on doit dire *isométriques*), qui ont une hypoténuse de mesure 1 et un côté de l'angle droit de mesure $\frac{1}{2}$, le second côté de l'angle droit étant la hauteur en question. On applique alors le théorème de Pythagore pour trouver la mesure de cette hauteur. On trouve $\sqrt{\frac{3}{4}}$, qui peut aussi s'écrire $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (La forme $\sqrt{0,75}$ était également acceptée.)

13- <u>Géométrie dans l'espace</u>.

A la place du prisme, on aurait pu proposer un « prisme déformé », qui n'est plus un prisme :

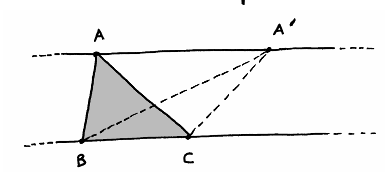
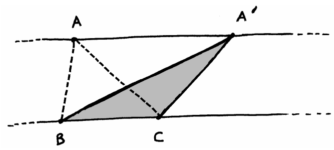


Le nom à donner serait alors simplement « pentaèdre ». (Les quantités F, A et S ne seraient pas modifiées.)

Mais attention, **<u>pour la rentrée 2012, le titre « géométrie dans l'espace » est remplacé par « formules de longueurs, aires, volumes »</u>**.

Voici un récapitulatif des formules à connaître :

Formules d'aires et de volumes

Aire d'un rectangle 'plein'	« longueur×largeur »	Toutes les formules d'aires se retrouvent à partir de celle-ci. Cette formule est en quelque sorte une définition de la multiplication de deux longueurs. Elle implique que le produit de deux longueurs est une aire. Toujours.
Aire d'un carré	« côté×côté » « côté ^{2} »	
Aire d'un parallélogramme	« base×hauteur »	
Aire d'un triangle	« $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ »	
Corollaire :	On ne modifie pas l'aire d'un triangle si l'on 'déplace' son sommet parallèlement à sa base. 	
Aire d'un disque (et tant qu'on y est, périmètre)	πr^2 (où r est le rayon)	Le périmètre, c'est $2\pi r$ (voir ci-dessous)
Au fait, c'est quoi, π ?	C'est un <u>nombre</u> égal au r a p p o r t (c'est-à-dire au quotient) du périmètre d'un cercle sur son diamètre. C'est le même nombre pour tous les cercles : « $\pi = \dfrac{\text{périmètre}}{\text{diamètre}}$ » donc « $\text{périmètre} = \pi \times \text{diamètre}$ » donc « $\text{périmètre} = 2 \times \pi \times rayon$ »	

Volume d'un pavé droit	« longueur×largeur×hauteur »	Donc le produit de trois longueurs est un volume. Toujours.
Volume d'un prisme droit	« <u>base</u> fois hauteur »	Par « base », on entend <u>l'aire</u> de la base. Le produit d'une aire par une longueur est un volume. (Dans le cas du prisme, la « base » est le polygone auquel on a « donné de l'épaisseur » pour former le prisme.)
Volume d'un cylindre		
Volume d'une pyramide	« $\dfrac{1}{3}\text{base} \times \text{hauteur}$ »	
Volume d'un cône		

Aire d'une sphère	« $4\pi \times \text{rayon}^2$ »	La sphère est la surface de la boule.
Volume d'une boule	« $\frac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$ »	

Si vous avez oublié le sens de certains mots, vous pouvez consulter le document « vocabulaire de géométrie » (page 16) sur le site MathEnSeconde.